Карта сокровищ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор заданий с открытым ответом и заданий творческой части

4-5 класс

Задания с открытым ответом

Задача №1 (4 балла)

Пин-код на мобильном телефоне состоит из четырёх цифр, каждая из которых может быть или 0, или 1. Сколько потребуется попыток, чтобы наверняка включить телефон, если известно, что:

1) код содержит ровно одну цифру 1;
2) код содержит цифры 0 и 1;
3) сумма цифр кода нечётная.

Решение

1) Ровно одну цифру 1 содержат коды: 0001, 0010, 0100, 1000. Их 4.

2) Всего кодов $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Только два из них не удовлетворяют условию: 0000 и 1111. Следовательно, искомых кодов 16 - 2 = 14.

3) Сумма цифр кода нечётная, когда в коде ровно одна цифра 1 или ровно одна цифра 0. Таких кодов 4 + 4 = 8.

Ответ: 1) 4; 2) 14; 3) 8.

Комментарий:

С этой задачей справились 73% участников. Решить данную задачу можно, выписав все варианты пин-кода (их 16) и посчитав, какое количество среди них подходит для каждого пункта задачи.

Задача №2 (4 балла)

Имеется кусок проволоки длиной 3 м. Его нужно разрезать на кусочки длиной 5 см и 10 см. Сколько получим кусочков каждого размера, если нужно, чтобы:

1) их количество было одинаковым;
2) более длинных кусочков было вдвое больше, чем коротких;
3) одних кусочков было на 15 больше, чем других?

Решение

1) Так как количество кусочков каждого размера должно быть одинаковым, то можно считать, что отрезаются кусочки длиной 5 + 10 = 15 см, а потом каждый из них делится на два заданной длины. Искомое количество равно $300:15=20$.

2) Так как количество более длинных кусочков должно быть в 2 раза больше, то можно считать, что отрезаются кусочки длиной $5+10+10=25$ см, а потом каждый из них делится на два кусочка по 10 см и кусочек длинны 5 см. Количество кусочков длины 25 см равно 300:25 = 12. Значит, более длинных кусочков будет $12 \cdot 2 = 24$, а коротких будет 12.

3) Так как в условии не сказано, каких кусочков больше, то нужно рассмотреть два случая. Будем вначале считать, что больших кусочков на 15 больше, чем меньших. Отрежем сначала 15 больших кусочков, а оставшуюся часть проволоки поделим на одинаковое количество больших и меньших кусочков аналогично пункту 1). После отрезания 15 кусочков длинны 10 см, останется $300-15 \cdot 10=150$ см проволоки из которых получится по 10 кусочков каждого вида. То есть всего будет 10 меньших кусочков и 25 больших. Если считать, что меньших кусочков на 15 больше, то после отрезания 15 меньших кусочков от проволоки останется $300-15 \cdot 5=225$ см. Далее порежем 225 см проволоки на кусочки длины 15 см, и потом порежем каждый из них, на кусочки длинны 5 см и 10 см. 225:15 = 15. Значит, всего кусочков длины 10 см будет 15, а кусочков длины 5 см будет 15 + 15 = 30.

Ответ: 1)20 и 20; 2) 12 меньших и 24 больших; 3) 10 и 25 или 30 и 15.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить 79% участников. Основная ошибка участников заключалась в том, что они привели только один ответ для третьего пункта задачи. Они не учли, что в этом пункте возможны два различных варианта.

<u>Задача №3 (4 балла)</u>

Сшили одеяло из одинаковых квадратных лоскутов. В каждом месте, где соединялись 4 лоскута, пришивали пуговицу.

1) Сколько было пришито пуговиц, если на пошив одеяла ушло: а) 10 лоскутов в ширину и 15 в длину; б) 15 лоскутов в ширину и 20 в длину?
2) Сколько лоскутов в ширину и сколько в длину ушло на пошив одеяла, если было пришито 437 пуговиц?

Решение

1) Четыре одинаковых квадратных лоскута соединяются только внутри прямоугольника, но не на его сторонах. Если прямоугольник состоит из a лоскутов в ширину и b лоскутов в длину, то количество пришитых пуговиц равно $(a-1)(b-1)$.

а) Искомое количество равно $9\cdot 14=126$.

б) Искомое количество равно $14\cdot 19=266$.

2) Так как прямоугольник состоит из a лоскутов в ширину и b лоскутов в длину, то количество пришитых пуговиц равно $(a-1)(b-1)$. Число 437 разлагается в произведение двух чисел следующим образом: $437=19\cdot 23=1\cdot 437$. Следовательно, возможны два случая: $a-1=19$, $b-1=23$. Тогда, a=20, а b=24 и $a-1=1$, $b-1=437$. Тогда, a=2, а b=438.

Ответ: 1) а) 126; б) 266; 2) 20 и 24 или 2 и 438.

Комментарий:

В этой задаче правильные ответы привели 76% участников. Первый пункт задачи можно было решить, нарисовав сетку указанного в условии размера и посчитав количество узлов в данной сетке. Основная ошибка участников заключалась в том, что они, как и в предыдущей задаче, не учли, что во втором пункте возможны два варианта, в результате чего привели только один из возможных ответов.

<u>Задача №4 (4 балла)</u>

Из одинаковых палочек выложили границу фигуры квадратной формы со стороной 1 метр. Затем с помощью таких же палочек разделили её на равные квадратики так, что два соседних квадратика разделены одной палочкой.

1) Сколько потребовалось палочек, если длина каждой палочки равна: а) 10 см; б) 5 см?
2) Какова длина палочек, если их потребовалось 1300?

Решение

1) Указанное в условии построение можно изобразить в виде квадратной сетки, то есть квадрата, разделённого на равные квадратики. Задача сводится к нахождению количества отрезков квадратной сетки, которые являются сторонами квадратиков сетки.

а) Если длина палочек 10 см, то в ряду сетки 100:10 = 10 квадратиков и рядов 10. Квадратная сетка образована 22 отрезками длиной 100 см. На каждом таком отрезке 10 маленьких отрезков. Всего маленьких отрезков $22\cdot 10=220$.

б) Если длина палочек 5 см, то в ряду сетки 100:5 = 20 квадратиков и рядов 20. Отрезки длиной 5 см, ограничивающие квадратики, лежат на 42 отрезках длиной 100 см. Всего отрезков длины 5 будет $42\cdot 20=840$.

2) Из решения предыдущего задания следует, что длина палочек меньше 5 см. Если она равна 4 см, то отрезков длиной 4 см на отрезке длиной 100 см помещается 100:4 = 25. Количество отрезков длиной 100 см, образующих сетку, равно 52. Тогда отрезков длиной 4 см на них $52 \cdot 25 = 1300$.

Следовательно, искомая длина равна 4 см.

Ответ: 1) а) 220; б) 840; 3) 4 см.

Комментарий:

59% участников справились с данной задачей. Можно вывести формулу для подсчета количества палочек в фигуре. Если количество палочек в одном ряду обозначить за x, то длинна одной палочки будет равна 1/x. Общее количество палочек в фигуре будет равно 2*x*(x + 1). Для пункта 1а, длина палочки равна 1/x = 0,1, значит x = 10, подставив x в формулу, получим 2*10*11=220. Пункт 2б решается аналогично, попробуйте сделать это в качестве упражнения. Во втором пункте задачи имеем уравнение 2*x*(x + 1) = 1300 или x*(x + 1) = 650. В данном уравнении x = 25 не сложно подобрать 25*26 = 650 (ответ x = -26 не подходит, так как решение должно быть в натуральных числах). После чего находим ответ 1/25 = 0,04, то есть 4 см.

<u>**Задача №5 (4 балла)**</u>

Из одинаковых кубиков склеили куб. Для склеивания каждой пары граней у двух соседних кубиков требуется 1 г клея.

1) Сколько всего клея потребовалось, если кубиков было: а) 8; б) 27?
2) Сколько было использовано кубиков, если потребовалось 300 г клея?

Решение

1) а) У 8 кубиков всего $6 \cdot 8 = 48$ граней, а у полученного куба граней 6. Каждая из этих 6 граней состоит из 4-х граней исходных кубиков. Всего не склеивалось $6 \cdot 4 = 24$ грани, а склеивалось $48 - 24 = 24$ грани. Для склеивания каждой пары граней у двух соседних кубиков потребовался 1 г клея. Следовательно, всего понадобилось 24:2 = 12 г клея.

2) У 27 кубиков всего $6 \cdot 27 = 162$ грани, а у полученного куба граней 6. Каждая из этих 6 граней состоит из 9 граней исходных кубиков. Всего не склеивалось $6 \cdot 9 = 54$ грани, а склеивалось $162 - 54 = 108$ граней. Для склеивания каждой пары граней у двух соседних кубиков потребовался 1 г клея. Следовательно, всего понадобилось 108:2 = 54 г клея.

2) Если потребовалось 300 г клея, то склеивалось 600 граней маленьких кубиков. Значит, кубиков было больше 100. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, значит сторона куба должна содержать более 4 кубиков. Если куб состоял из 125 кубиков, то есть $5 \cdot 5 \cdot 5$, то граней $125 \cdot 6 = 750$. А на каждой грани большого куба 25 граней маленьких кубиков. Следовательно, не склеивалось $25 \cdot 6 = 150$ граней, а склеивалось $750 - 150 = 600$. Искомое количество кубиков 125.

Ответ: 1) а) 12г; б) 54 г; 2) 125 кубиков.

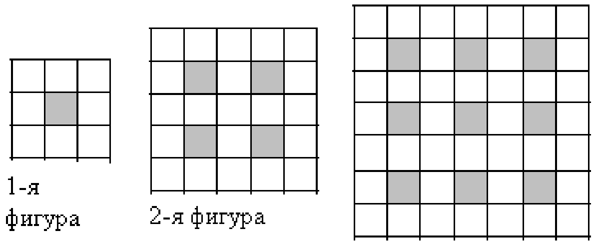
Комментарий:

Эту задачу тоже смогли решить 59% участников. Как и предыдущей задаче, здесь можно вывести формулу подсчета необходимого количества клея. Пусть сторона куба содержит x кубиков. Тогда всего кубиков будет x^3, они имеют $6*x^3$ граней. На сторонах куба расположено $6*x^2$ граней, они не склеиваются. Значит склеенных граней остается $6*x^3 – 6*x^2$. Для склеивания двух граней требуется 1 г клея, значит всего клея потребуется $(6*x^3 – 6*x^2)/2$, то есть $3*x^2(x – 1)$. Для решения первого пункта задачи подставим x = 2 и x = 3. Получим ответы 12 и 54 соответственно. Для решения второго пункта задачи необходимо решить уравнение $3*x^2(x – 1) = 300$ или $x^2(x – 1) = 100$. Ответ не сложно подобрать x=5.

Творческое задание

<u>Задача №1 (7 баллов)</u>

На рисунке изображены первые три фигуры последовательности, составленные из равных квадратов. Следующие фигуры образуются так, как третья из второй, вторая из первой. Сколько незакрашенных клеток содержит: 1) 5-я фигура; 2) 10-я фигура; 3) 100-я фигура?



1-я фигура 2-я фигура 3-я фигура

Решение

Анализируя первые три фигуры, приходим к выводу, что количество клеток, содержащихся в каждой фигуре, является квадратом натурального числа, причём, если n — номер фигуры, то количество клеток равно $(2n+1)^2$ (при n = 1 количество клеток равно $(2\cdot1+1)^2=9$; при n = 2 количество клеток равно $(2\cdot2+1)^2=25$; при n = 3 количество клеток равно $(2\cdot3+1)^2=49$).

Количество закрашенных клеток равно квадрату номера фигуры, то есть n^2. Тогда количество незакрашенных клеток равно $(2n+1)^2-n^2$.

В условии сказано, что следующие фигуры образуются по тому же самому закону, поэтому для подсчёта количества незакрашенных клеток применима та же формула.

1) Искомое число равно $(2\cdot5+1)^2-5^2=121-25=96$.

2) Искомое число равно $(2\cdot10+1)^2-10^2=441-100=341$.

3) Искомое число равно $(2\cdot100+1)^2-100^2=40401-10000=30401$.

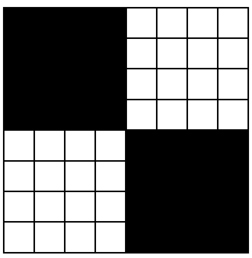
Ответ: 1) 96; 2) 341; 3) 30401.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить чуть меньше половины участников (47%). Если первые два пункта задачи можно решить и без формулы, просто нарисовав фигуры на бумаге, то с третьим пунктом это довольно проблематично. Для решения третьего пункта необходимо найти закономерности, из которых можно посчитать ответ. С третьим пунктом задачи большинство участников не справились.

<u>Задача №2 (7 баллов)</u>

Имеется квадрат размером 8n×8n клеток, n = 1, 2, 3, … . Закрашены в чёрный цвет клетки, образующие квадраты размером 4n×4n клеток, стоящие в левом верхнем и в правом нижнем углах, например, как на рисунке. Сколько в этом квадрате можно указать квадратов, составленных из 2n×2n клеток и имеющих одинаковое количество закрашенных и незакрашенных клеток, если: 1) n = 1; 2) n = 2; 3) n = 10?



Решение

1) Нужно подсчитать для квадрата 8х8 клеток количество квадратов, составленных из 2х2 = 4 клеток и имеющих 2 закрашенные и 2 незакрашенные клетки.

Квадраты, удовлетворяющие условию, изображены на рис. 1. Они получаются передвижением центрального квадрата 2х2, изображённого на рис. 2, влево, вправо, вверх, вниз на одну клетку. Таких сдвигов всего $4 \cdot 3 = 12$. Искомое количество равно 13.

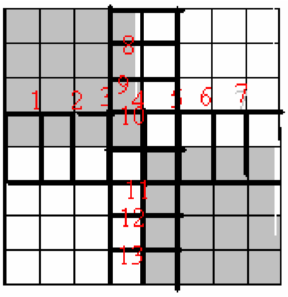


Рис. 1

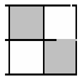


Рис. 2

2) Нужно подсчитать для квадрата 16х16 клеток количество квадратов, составленных из 4х4 = 16 клеток и имеющих 4 закрашенные и 4 незакрашенные клетки.

Анализируя условия и решение предыдущего задания, приходим к выводу, что нужно подсчитать количество сдвигов на 1 клетку влево, вправо, вверх, вниз квадрата, состоящего из 16 клеток, центр которого совпадает с центром исходного квадрата, до его сторон. Это количество равно $4 \cdot (8-2) = 24$. Искомое количество равно 25.

3) Исходный квадрат имеет размеры 80х80 клеток, закрашенные квадраты — 40х40 клеток. Квадраты, количество которых нужно подсчитать, имеют размеры 20х20 клеток. Количество сдвигов центрального квадрата, удовлетворяющих условию, равно $4 \cdot (40-10) = 120$. Искомое количество равно 121.

Ответ: 1) 13; 2) 25; 3) 121.

Комментарий:

Эта задача оказалась самой сложной, ее смогли решить только 16% участников. Большинство просто не привели никакого решения. Некоторые смогли правильно описать идею подсчета количества искомых квадратиков, но не смогли аккуратно ее реализовать, допустив ошибки в расчетах. Алгоритмы подсчета могут быть разные, в авторском решении указан один из наиболее удобных алгоритмов для подсчета.

<u>Задача №3 (7 баллов)</u>

Квадратный участок со стороной 90 м, ограждённый сеткой, делят на 4 участка прямоугольной формы.

1) Хватит ли 200 погонных метров сетки для ограждения новых участков?
2) Какое наименьшее количество погонных метров сетки наверняка хватит для ограждения новых участков?
3) Сколько погонных метров сетки понадобится для ограждения новых участков, если ровно три участка имеют квадратную форму?

Решение

Пусть квадрат является изображением участка. Тогда разделению участка на 4 участка прямоугольной формы соответствует разбиение квадрата на 4 прямоугольника. На рис. 1, 2, 3, 4, 5 изображены возможные варианты такого разбиения.

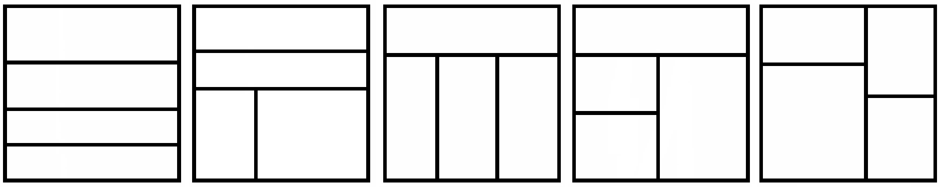
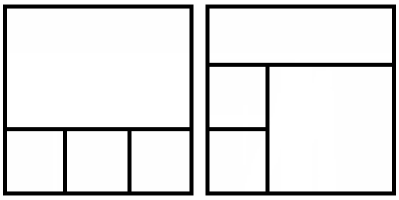


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

1) 200 погонных метров сетки может не хватить, если разбиение на участки изображено на рис. 1. В данном случае требуется $90 \cdot 3 = 270$ (п. м).

2) На рис. 1 требуется ровно 270 погонных метров сетки для ограждения участков. На рис 2, 3 и 4 сумма длин отрезков может быть как угодно близка к 270 м, но не может ее превышать. На рис. 5 потребуется всего 180 м. Таким образом, 270 метров сетки наверняка хватит.

3) Этому условию удовлетворяет только частные случаи разбиений, изображённых на рис. 3 и рис. 4.



Для варианта с рисунка 3 требуется $90 + 30 + 30 = 150$ погонных метров сетки. Для варианта с рисунка 4 требуется $90 + 30 + 60 = 180$ погонных метров сетки.

Ответ: 1) Нет; 2) 270 м. 3) 150 м или 180 м.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить правильно 28% участников. Основная ошибка заключалась в том, что участники по невнимательности упускали некоторые возможные варианты деления участка. В следствии чего, получали неверные ответы либо не все возможные варианты ответов.

6-7 классы

Задания с открытым ответом

Задача №1 (4 балла)

Участие отдыхающих санатория в экскурсии в Ботанический сад предусматривает затраты на заказ автобуса, приобретение входных билетов, обед в кафе. Заказ автобуса, вмещающего 45 пассажиров, стоит 9 000 руб., стоимость входного билета — 100 руб., комплексного обеда — 200 руб.

1) Какую сумму денег необходимо иметь, чтобы принять участие в экскурсии, при условии, что автобус будет полностью заполнен?
2) На сколько процентов увеличится необходимая сумма для участия в экскурсии, если автобус будет заполнен на две трети вместимости?
3) Какое должно быть наименьшее количество желающих принять участие в экскурсии, чтобы на поездку хватило 700 руб.?

Решение

1) Если автобус заполнен полностью, то каждый участник экскурсии за его заказ платит 9000:45 = 200 руб. При этом условии для участия в экскурсии необходимо иметь не менее 200 + 100 + 200 = 500 руб.

2) Если автобус будет заполнен на две третьих, то есть в экскурсии примет участие $45 \cdot \frac{2}{3} = 30$ человек, то каждый участник экскурсии за его заказ платит 9000:30 = 300 руб. При этом условии для участия в экскурсии необходимо иметь не менее 300 + 100 + 200 = 600 руб. Необходимая сумма для участия в экскурсии увеличится на 600 – 500 = 100 руб., что составляет 20% от 500 рублей.

3) Чтобы на поездку хватило 700 руб., за заказ автобуса каждый участник должен заплатить не более $700-(100+200)=400$ руб. Для этого в экскурсии должно участвовать не более $9000:400 \approx 23$ человека (округление в большую сторону).

Ответ: 1) Не менее 500 руб.; 3) На 20%; 3) 23 человека

Комментарий:

Эту задачу смогли решить 75% участников. Задача не требовала специальных знаний и навыков, необходимо было просто все правильно посчитать.

Задача №2 (4 балла)

Месячный семейный бюджет распределялся следующим образом: 50% тратилось на питание, 20% — на коммунальные услуги, 30% — на все прочие нужды.

1) Известно, что в этом месяце расходы на питание превысили расходы на коммунальные услуги на 18 тыс. зедов (зед — условная денежная единица). Определите размер семейного бюджета.
2) В дальнейшем семье пришлось тратить 2 000 зедов в месяц на подготовительные курсы для дочери (расходы на курсы не учитываются в статье «прочие нужды»), хотя новых доходов не поступало. Расходы на коммунальные услуги не изменились. Какую сумму стала тратить семья на питание, если сохранилось соотношение между расходами на питание и расходами на прочие нужды?
3) В начале месяца семья получила проценты с депозита в сумме 5 000 зедов. Может ли она позволить себе купить в этом месяце верхнюю одежду (прочие нужды) на сумму 22 000 зедов, если выполняются условия задания 2)?

Решение

1) Так как 18 тыс. зедов составляют $50-20=30\%$ от семейного бюджета, то семейный бюджет составляет $\frac{18\cdot 100}{30}=60$ тыс. зедов.

2) Расходы на коммунальные услуги составляют $60\cdot 0{,}2=12$ тыс. зедов. Учитывая плату за подготовительные курсы, в семье остаётся на питание и прочие расходы $60-12-2=46$ тыс. зедов. Если расходы на питание и прочие нужды принять за 1, то на питание тратилось $\frac{50}{50+30}=\frac{5}{8}$ этих расходов, то есть $\frac{5}{8}$ от 46 тыс. зедов или 28 тыс. 750 зедов.

3) На питание и прочие нужды потрачено $60+5-2-12=51$ тыс. зедов, $\frac{3}{8}$ от этой суммы идёт на прочие нужды. Это составляет 19 тыс. 125 зедов. То есть на прочие нужды семья может потратить менее 20 тыс. зедов.

Ответ: 1) 60 тыс. зедов; 2) 28 тыс. 750 зедов; 3) Не может.

Комментарий:

Как и в предыдущей задаче, здесь требовалось внимательно рассчитать все неизвестные. В этой задаче 70% участников дали правильные ответы.

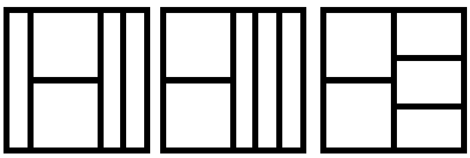
<u>**Задача №3 (4 балла)**</u>

Земельный участок, имеющий форму квадрата, разделён на несколько равных участков квадратной формы и несколько равных участков прямоугольной формы, но не квадратной. Каков наибольший периметр участка прямоугольной (неквадратной) формы, если периметры участков квадратной формы равны 144 м каждый и количества участков квадратной и прямоугольной (неквадратной) форм соответственно равны: 1) 2 и 3; 2) 2 и 4; 3) 3 и 3?

Решение

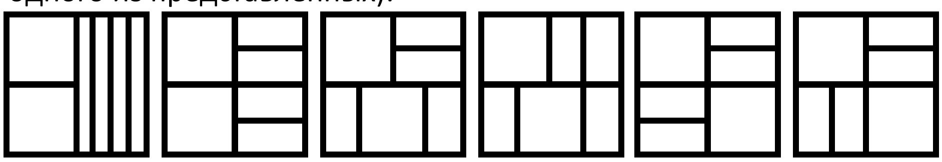
Каждый участок квадратной формы имеет периметр 144, значит, размеры квадратных участков равны 36x36.

1) Разбиение квадратного участка на 2 равных квадрата и 3 равных прямоугольника может выглядеть следующими способами (остальные способы получаются поворотом или симметрией одного из представленных):



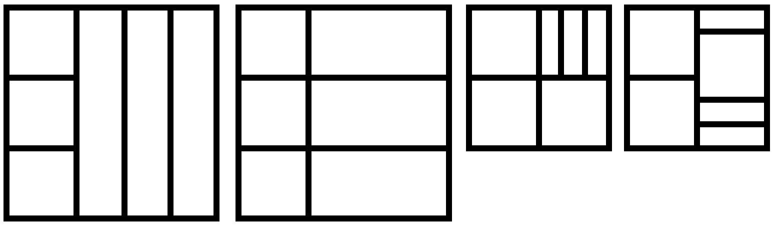
В первых двух случаях прямоугольные участки имеют размеры 12x72 и периметр 168, в третьем случае 24x36 и периметр 156. Значит, наибольший периметр прямоугольного участка может быть равен 168 м.

2) Разбиение квадратного участка на 2 равных квадрата и 4 равных прямоугольника может выглядеть следующими способами (остальные способы получаются поворотом или симметрией одного из представленных):



В первом случае прямоугольники имеют размеры 9х72 и периметр 162, в остальных 18х36 и периметр 108. Значит, наибольший периметр прямоугольного участка может быть равен 162 м.

3) Разбиение квадратного участка на 3 равных квадрата и 3 равных прямоугольника может выглядеть следующими способами (остальные способы получаются поворотом или симметрией одного из представленных):



Очевидно, что в третьем и четвертом способах прямоугольники имеют меньший периметр чем в первых двух. В первом случае прямоугольники имеют размер 24х108 и периметр 264, во втором 36х72 и периметр 216. Значит, наибольший периметр прямоугольного участка может быть равен 264 м.

Ответ: 1) 168 м; 2) 162 м; 3) 264 м.

Комментарий:

Эта задача оказалась самой сложной для участников. Ее смогли решить правильно только 14%. Основная ошибка участников в этой задаче состояла в том, что они упускали некоторые возможные варианты разбиения. В связи с чем решения были неполные и ответы не всегда правильные.

<u>Задача №4 (4 балла)</u>

Дверь открывается, если одновременно нажать две кнопки с цифрами двузначного кода, составленного из различных цифр 0, 1, 2, …, 9 (код может начинаться с цифры 0). На каждую новую попытку открыть дверь нажатием кнопок требуется ровно 4 секунды. Сколько нужно секунд, чтобы наверняка открыть дверь, если:

1) известна одна цифра кода;
2) известно, что обе цифры нечётные;
3) известно, что сумма цифр кода нечётна?

Решение

1) Возможны 9 вариантов кода. Поэтому за 9 попыток, то есть за $4 \cdot 9 = 36$ секунд, дверь можно наверняка открыть.

2) Имеется 20 вариантов упорядоченных пар различных цифр, составленных из цифр 1, 3, 5, 7, 9: (1,3), (1,5), (1, 7), (1, 9), (3, 1), … . Так как код набирается одновременным нажатием двух кнопок с цифрами кода, то за 10 попыток можно наверняка открыть дверь. Следовательно, за 40 секунд дверь можно наверняка открыть.

3) Сумма двух чисел нечётна, если одно из них чётно, а другое нечётно. Так как имеется 5 нечётных и 5 чётных цифр, то существует $5 \cdot 5 = 25$ пар чисел, сумма которых нечётна. Следовательно, за 100 секунд дверь можно наверняка открыть.

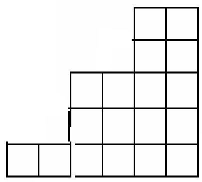
Ответ: 1) 36 с; 2) 40 с; 3) 100 с.

Комментарий:

С этой задачей справились 21% участников. Задача на комбинаторику. Сложность задачи в том, чтобы посчитать количество возможных вариантов кода. И если в первом пункте задачи это не вызывает трудностей, то далее все немного сложнее. Во втором пункте задачи не обязательно было перебирать все возможные варианты. Достаточно было заметить, что нечетных цифр пять, а количество вариантов выбрать неупорядоченную пару из пяти элементов это 5*4/2 = 10.

Задача №5 (4 балла)

Сколько необходимо маленьких квадратиков, чтобы образовать ступенчатую фигуру, подобную изображённой на рисунке, если в нижнем её ряду: 1) 20 клеток; 2) 100 клеток; 3) $2n$ клеток?



Решение

Из двух одинаковых фигур данного вида с $2n$ клетками в основании можно составить квадрат со стороной $2n$. Следовательно, количество клеток в данной фигуре равно $\frac{2n\cdot 2n}{2}=2n^2$.

1) $2\cdot 10^2=200$;

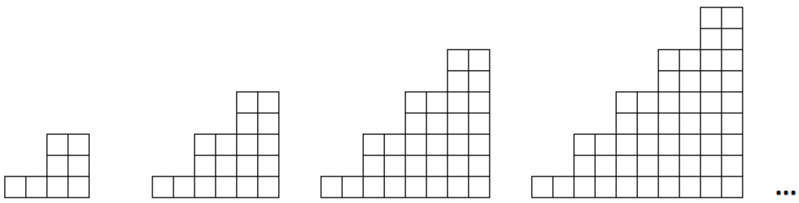
2) $2\cdot 50^2=5000$;

3) $2n^2$.

Ответ: 1) 200; 2) 5000; 3) $2n^2$.

Комментарий:

Больше половины (54%) участников решили эту задачу. В авторском решении применена хорошая идея, позволяющая упростить расчеты, но можно было решать задачу и более очевидным путем. Можно рассмотреть последовательность фигур, описанных в условии:



И попытаться понять, как посчитать количество клеток для фигуры под номером N. В данном случае это 4*N*(N + 1)/2 + 2*(N + 1), где 2*(N + 1) это количество клеток в нижнем ряду, а 4*N*(N + 1)/2 это количество клеток без нижнего ряда. Преобразуя формулу, получим $2*(N + 1)^2$. Номер фигуры из количества клеток в нижнем ряду выражается следующим образом (x – 2)/2, где x – количество клеток в нижнем ряду. Таким образом, получим следующие ответы:

1) $2*(9 + 1)^2 = 200$;
2) $2*(49 + 1)^2 = 5000$;
3) $2*((2n – 2)/2 + 1)^2 = 2*n^2$.

Творческое задание

Задача №1 (7 баллов)

В классе 20 учащихся. Назовём «расстоянием» между двумя учащимися количество дней между их датами рождения.

1) Может ли среди всех попарных «расстояний» между семью учащимися встретиться одно и то же число ровно 10 раз?
2) Может ли среди всех попарных «расстояний» между десятью учащимися встретиться одно и то же число ровно 10 раз, если известно, что в классе нет совпадающих дат рождения?
3) Какое наибольшее количество раз может встретиться одно и то же число среди всех попарных «расстояний» между учащимися класса, если в каждый месяц есть дни рождения не более 6 человек?

Решение

1) Количество попарных «расстояний» между пятью учащимися равно 10. Если все эти учащиеся имеют одну и ту же дату рождения, а остальные двое из семи — другие и различные даты, то ровно 10 раз число 0 встретится среди всех попарных «расстояний» между семью различными учащимися.

2) Если даты рождения десяти учащихся различные, то их можно изобразить десятью точками на числовой прямой. Наибольшее количество раз одно и то же число может встретиться среди всех попарных «расстояний» между десятью различными точками прямой равно 9. Это будет в случае, когда расстояния между соседними точками равны. Следовательно, 10 раз не может встретиться.

3) Если все даты рождения изобразить на числовой прямой четырьмя точками на одинаковом расстоянии в трех из которых даты рождения имеют по 6 учащихся, и в одной точке дату рождения имеют 2 учащихся, то количество одинаковых «расстояний» между учащимися будет равно $6\cdot6+6\cdot6+6\cdot2=84$.

Ответ: 1) Да; 2) нет; 3) 84.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить только 23% участников. Многие давали ответы без каких-либо объяснений и доказательств. Естественно, подобные вещи не оцениваются большим количеством баллов. Даже если вы не знаете, как строго доказать свой ответ, то изложите в решении свои мысли и соображения по поводу задачи. Баллов за это вы точно не потеряете, а вот получить вполне можете.

Задача №2 (7 баллов)

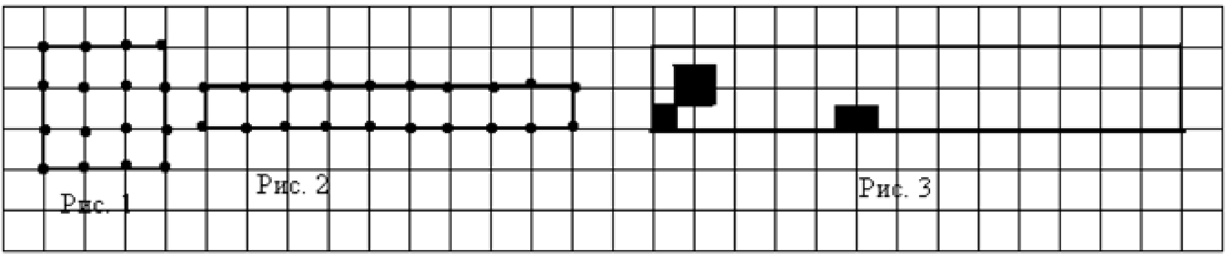
Какое наибольшее число узлов клетчатой бумаги может содержать прямоугольник (внутри и на границе), стороны которого идут по линиям сетки, и он состоит из:

1) 9 клеток;
2) 26 клеток;
3) 260 клеток?

Решение

1) Из 9 клеток можно составить два неравных прямоугольника, удовлетворяющих условию (см. рис. 1 и рис. 2). На рис. 2 узлов 20, а на рис. 1 — 16. Следовательно, искомое число равно 20.

2) Из 26 клеток можно также составить только два неравных прямоугольника: 2 клетки × 13 клеток (рис. 3) и 1 клетка × 26 клеток. Количество узлов клетчатой бумаги, содержащихся в прямоугольнике 1 клетка × 26 клеток равно 54, и это число больше количества узлов у прямоугольника, изображённого на рис. 3. Следовательно, искомое число равно 54.



3) Рассмотренные случаи позволяют выдвинуть гипотезу о том, что искомое число для любого прямоугольника, состоящего из *n* клеток и удовлетворяющего условию, равно количеству узлов клетчатой бумаги, содержащихся в самом «узком» прямоугольнике — 1 клетка × *n* клеток. Это число равно $2n + 2$.

Для доказательства этой гипотезы для каждого узла, содержащегося внутри прямоугольника, состоящего из n клеток, построим квадрат с центром в этом узле, равный клетке (см. рис. 3).

Для узлов, являющихся вершинами прямоугольника, построим квадратики, как показано на рис. 3, в 4 раза меньшие клетки, а для узлов на сторонах прямоугольника, но не в вершинах, — прямоугольники, как показано на рис, 3, равные половине клетки.

Объединение построенных фигур покрывает прямоугольник. Если площадь клетки принять за единицу, то площадь прямоугольника равна *n* и $n = a + \frac{b}{2} - 1$ где *a* — количество узлов внутри, *b* — на сторонах прямоугольника. Тогда $a + b = n + \frac{b}{2} + 1$ и принимает наибольшее значение, когда *b* — наибольшее. А наибольше количество узлов на сторонах прямоугольника будет тогда, когда прямоугольник самый «узкий».

Следовательно, для прямоугольника, содержащего 260 клеток, искомое число равно 522.

Ответ: 1) 20; 2) 54; 3) 522.

Комментарий:

С этой задачей справились только 29% участников. В первых двух пунктах задачи можно было просто нарисовать возможные прямоугольники и посчитать количество узлов. Основная ошибка участников тут была в том, что они приводили только один из возможных вариантов прямоугольника. Но в этом случае решение не является полным, ведь нет доказательства, что полученный ответ наибольший. В третьем пункте доказательство довольно сложное и требует неочевидных соображений. Лишь несколько участников смогли до него догадаться. Рекомендую разобраться в нем подробнее.

<u>Задача №3 (7 баллов)</u>

Имеются гирьки массой 1 г, 2 г, 3 г, …, 24 г.

1) Можно ли их разложить на 15 кучек, равных по массе?
2) Можно ли их разложить на 5 кучек, равных по массе?
3) На сколько равных по массе кучек можно разложить гирьки?

Решение

Масса всех гирек равна $1+2+3+...+24=(1+24)+(2+23)+...+(12+13)=25\cdot 12=300$ г.

1) На 15 равных по массе кучек разложить нельзя, так как в каждой кучке должно быть 300:15 = 20 г, а имеются гири и массой, большей 20 г.

2) Можно. Масса каждой кучки равна 300:5 = 60 г. Кучки имеют, например, такой состав:

1-я: 24 + 23 + 13 = 60 г;

2-я: 22 + 21 + 17 = 60 г;

3-я: 20 + 19 + 18 + 3 = 60 г;

4-я: 16 + 15 + 14 + 12 + 1 + 2 = 60;

5-я: 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 60.

3) Количество кучек *n* должно быть делителем числа 300, большим 1. Делители числа 300: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150. Количества кучек, начиная с 15, невозможны (см. решение пункта 1).

Разложить гирьки на 12 равных по массе кучек можно, так как число 12 является делителем числа 300, 300:12 = 25 и 24 + 1 = 23 + 2 = 22 + 3 = … = 13 + 12.

Объединяя полученные кучки по 2, 3, 4, 6 кучек, получим разложение гирек на равные по массе 6, 4, 3, 2 кучки.

Осталось осуществить разложение для *n* = 10. Если n = 10, то 300:10 = 30.

1-я кучка: 24 + 6 = 30.

2-я кучка: 23 + 7 = 30.

3-я кучка: 22 +8 = 30.

4-я кучка: 21 + 9 = 30.

5-я кучка: 20 + 10 = 30.

6-я кучка: 19 + 11 = 30.

7-я кучка: 18 + 12 = 30.

8-я кучка: 17 + 13 =30

9-я кучка: 16 + 14 =30.

10-я кучка: 15 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 30.

Ответ: 1) Нельзя; 2) Можно; 3) на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12.

Комментарий:

С последней задачей справились 38% участников. Сложность задачи в том, что она требует достаточно много времени для построения всех необходимых примеров. Большинство участников давали ответы в этой задаче без объяснений и доказательств. Подобные решения оцениваются малым количеством баллом. Старайтесь всегда писать решение максимально подробно, где это требуется. Это никогда не бывает лишним.

8-9 класс

Задания с открытым ответом

Задача №1 (4 балла)

Сейф открывается, если три цифры кода будут набраны в нужном порядке. На кнопках изображены цифры 0, 1, 2, …, 9. На каждый новый набор кода требуется ровно 4 секунды. За какое наименьшее время сейф можно наверняка открыть, если:

1) известна третья цифра кода;
2) известна одна цифра кода, но неизвестно её место;
3) известно, что сумма трёх чисел кода нечётна?

Решение

1) Количество упорядоченных пар, составленных из 10 цифр, равно $10^2 = 100$. Требуемое время не превосходит 4 с·100 = 400 с = 6 мин 40 с.

2) Рассматривая известную цифру на 1-м, 2-м и 3-м местах кода и применяя результат решения задания 1), получим: $400 \cdot 3 = 1200$ с. Далее необходимо исключить варианты, рассмотренные более одного раза. Вариант с тремя совпадающими цифрами рассмотрен трижды, значит, от полученного ответа необходимо отнять $2 \cdot 4\,\text{с} = 8\,\text{с}$. Варианты с ровно двумя совпадающими цифрами равными известной рассмотрены по два раза. Таких вариантов $3 \cdot 9 = 27$. Значит, из ответа необходимо отнять еще $27 \cdot 4\,\text{с} = 108\,\text{с}$. Таким образом, получим: 1200 с - 8 с - 108 с = 1084 с = 18 мин 4 с.

3) Всего кодов 10^3. Сумма чисел кода нечётна, если или все эти числа нечётны (их $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$), или одно нечётное, а два чётные (их $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 375$). Всего 500 вариантов. Следовательно, искомое время равно 500·4 = 2 000 с = 33 мин. 20 с.

Ответ: 1) 6 мин 40 с; 2) 18 мин 4 с.; 3) 33 мин 20 с.

Комментарий:

Здесь 59% участников дали правильные ответы. Самая частая ошибка участников в данной задаче была в том, что во втором пункте они не учитывали, что при подобном решении, некоторые варианты кода будут введены несколько раз. Именно из-за этого ответ получался неверным.

Задача №2 (4 балла)

Можно ли прямоугольник, составленный из равных квадратиков, разрезать на фигурки, состоящие из четырёх квадратиков и имеющие форму буквы **Г**, если прямоугольник имеет размеры: 1) 16×12 квадратиков; 2) 15×16 квадратиков; 3) $8(m \cdot n)$ квадратиков, где $m>1$, $n>1$?

Решение

Из указанных в условии фигурок можно составить прямоугольник 2×4 (рис.1) и прямоугольник 3×8 (рис.2).

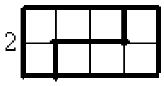


Рис. 1

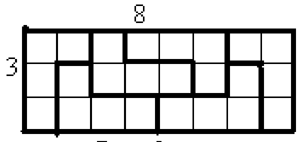


Рис. 2

Указанные в условии прямоугольники можно разбить или на прямоугольники 4×2 или 3×8:

1) 16×12 = 4·4 × 6·2;
2) 15×16 = 5·3 × 2·8;
3) $8(m \cdot n) = \begin{cases} 2m \times 4n, \\ 8m \times n. \end{cases}$ если прямоугольник имеет размеры $2m \times 4n$, то его можно разбить на прямоугольники 4×2. Если же прямоугольник имеет размеры $8m \times n$, где n не делится на 2 и не делится на 3, то отрезав от него прямоугольник $8m \times 3$(который можно разбить на прямоугольники 3×8) оставшуюся часть можно разбить на прямоугольники 4×2.

Ответ: 1) – 3). Можно.

Комментарий:

С этой задачей справились 79% участников. Решение первых двух пунктов задачи зачастую были оформлены в виде примера и не вызвали трудностей у участников. Чего нельзя сказать о третьем пункте задачи. Здесь многие рассматривали частные случаи или просто упускали некоторые возможные виды прямоугольников 8($m \cdot n$).

Задача №3 (4 балла)

Купили 60 шоколадных батончиков трёх видов соответственно по 50 г, 40 г и 30 г. Стоимость одного батончика первого вида 24 руб., второго — 21 руб., третьего — 18 руб. Общая масса покупки равна 2,5 кг. Какова стоимость покупки?

Решение

Обозначим количество батончиков по 50 г через x, по 40 г — через y, по 30 г — через z. Из условия следует система уравнений: $\begin{cases} x+y+z=60, \\ 50x+40y+30z=2500 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y+z=60, \\ 5x+4y+3z=250 \end{cases}$

Если правую и левую часть первого уравнения умножить на 3 и обеим частям полученного уравнения прибавить соответствующие части второго уравнения, то будем иметь уравнение $8x+7y+6z=430$.

Утроенная левая часть этого уравнения является выражением для стоимости покупки. Следовательно, вся покупка стоила $430 \cdot 3 = 1290$ руб.

Ответ: 1290 руб.

Комментарий:

В этой задаче 71% участников дали правильный ответ. Стандартная задача на составление системы из трех уравнений с тремя неизвестными.

Задача №4 (4 балла)

Поезд движется от станции X до станции Y по расписанию так: на протяжении первых двух минут он набирает скорость, преодолевая при этом 1 км, затем движется 40 минут со скоростью 72 км/ч, а за 2 км от станции Y начинает тормозить и через 3 минуты прибывает на станцию Y.

1) Найдите расстояние между станциями X и Y.
2) Вычислите среднюю скорость движения поезда.
3) Какова средняя скорость движения поезда с точностью 1 км/ч, если он сделал не предусмотренную расписанием остановку на промежуточной станции Z длительностью 2 минуты и прибыл на станцию Y на 7 минут позднее запланированного времени?

Решение

1) Т.к. за 40 минут, т.е. $\frac{2}{3}$ часа поезд со скоростью 72 км/ч проедет $72 \cdot \frac{2}{3} = 48$ км, а разгон и торможение требуют 2+1=3 км, то расстояние между станциями X и Y равно 48+3=51 км.

2) Расстояние 51 км поезд преодолевает за 2 + 40 + 3 = 45 мин или $\frac{3}{4}$ часа. Следовательно, его средняя скорость равна $51 : \frac{3}{4} = 51 \cdot \frac{4}{3} = 17 \cdot 4 = 68$ км/ч.

3) Из условия следует, что поезд для преодоления 51 км дополнительно потратил 7–2=5 мин, то есть всего 45 + 5 = 50 мин или $\frac{5}{6}$ ч. Следовательно, его средняя скорость равна $51 : \frac{5}{6} = 51 \cdot \frac{6}{5} = \frac{306}{5} \approx 61$ км/ч. **Ответ: 1) 51 км; 2) 68 км/ч; 3) ≈ 61 км/ч.**

Комментарий:

Здесь 60% участников дали правильные ответы. Задача не требовала особых знаний и навыков, необходимо было все внимательно и правильно посчитать.

Задача №5 (4 балла)

Робот может двигаться по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Один его «шаг» состоит в передвижении на 2 метра в одном направлении и на 1 метр в перпендикулярном ему направлении.

1) На какое наибольшее расстояние может удалиться робот за 5 «шагов»?
2) Может ли робот за 8 «шагов» попасть в точку, которая получается из данной перемещением на 8 метров в одном направлении и на 14 метров в перпендикулярном ему направлении?
3) Какое наименьшее количество «шагов» потребуется роботу, чтобы попасть в точку, которая получается из данной перемещением на 30 м в одном направлении, а затем на 24 м в перпендикулярном ему направлении?

Решение

Рассмотрим прямоугольную систему координат, построенную по заданным направлениям, и единицей измерения расстояний в 1 м. Если робот находится в точке (x; y), то за один «шаг» он может попасть в одну из восьми точек: (x + 2; y + 1), (x – 2; y + 1), (x + 2; y – 1), (x – 2; y – 1), (x + 1; y + 2), (x – 1; y + 2), (x + 1); y – 2), (x – 1; y – 2). Каждая из этих точек находится от точки (x; y) на расстоянии $\sqrt{5}$ м.

1) Из начала координат О робот за 5 «шагов» может попасть в точку (10; 5), находящуюся на расстоянии $\sqrt{100+25}=5\sqrt{5}$ м от точки О. Это наибольшее расстояние, на которое может удалиться робот за 5 «шагов», так как его положение после всех «шагов» находится на прямой.

2) За 5 «шагов» робот из точки О может попасть в точку (5; 10). За 8 – 5 = 3 «шага»: (5; 10) $\to$ (7; 11) $\to$ (6; 13) $\to$ (8; 14) робот попадёт в точку (8; 14). Следовательно, за 8 «шагов» робот может попасть в точку, которая получается перемещением на 8 метров в одном направлении и на 14 метров в перпендикулярном ему направлении.

3) Предположим, что робот за m «шагов» типа (x; y) $\to$ (x + 2; y + 1) и за n «шагов» типа (x; y) $\to$ (x + 1; y + 2) переместится из начала координат в точку (30; 24). Тогда справедливы равенства: $\begin{cases} 2m+n=30 \\ m+2n=24 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3m=36, \\ m+2n=24. \end{cases}$

Следовательно, m = 12, n = 6, то есть за 12 + 6 = 18 «шагов» можно попасть в точку (30; 24). Это наименьшее количество искомых «шагов». Если бы их было 17, то робот удалился бы на расстояние не более $17\sqrt{5}=\sqrt{1445}$ м, а расстояние от начала координат до точки (30; 24) равно $\sqrt{900+576}=\sqrt{1476}>17\sqrt{5}$ м.

Ответ: 1) $5\sqrt{5}$ м; 2) может; 3) 18.

Комментарий:

Эта задача оказалась самой трудной во второй части конкурса. Только 24% участников смогли ее решить. В первом пункте задачи необходимо было понять, на какое расстояние перемещается робот за один шаг. Далее ответ становится очевиден. Для второго пункта задачи надо было построить алгоритм. Третий пункт задачи был немного сложнее. Здесь тоже можно было построить. После получения ответа, убедиться в его минимальности можно следующим образом. За один шаг робот проходит 3 клетки. Чтобы сместиться на 30 м в одном направлении, а затем на 24 м в перпендикулярном ему направлении, роботу необходимо пройти хотя бы 30 + 24 = 54 клетки. Понятно, что робот не сможет это сделать менее, чем за 54/3 = 18 шагов.

Творческое задание

Задача №1 (7 баллов)

Мобильный оператор «AX» берёт 1 зед (зед — условная денежная единица) за подключение и 2 зеда за каждую минуту разговора, а мобильный оператор «OX» берёт за первую минуту разговора 1 зед, а за каждую следующую на 0,5 зеда больше, чем за предыдущую. Качество обслуживания у обоих операторов одинаковое.

1) Услугами какого оператора выгоднее пользоваться, если каждый день звонить:
   a. 5 – 6 раз по 7 – 8 минут;
   b. 10 – 11 раз по 3 – 4 минуты?
2) При какой средней длительности с точностью до минуты ежедневных звонков выгоднее пользоваться услугами оператора «AX»?

Решение

1) Расчёт стоимости представлен в следующей таблице.

Количество разговоров	Продолжи-тельность 1 разговора, мин	Стоимость обслуживания оператором «AX», зед	Стоимость обслуживания оператором «OX», зед
5	7	$(1 + 2\cdot 7)\cdot 5 = 15\cdot 5 = 75$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4)\cdot 5 = 17,5\cdot 5 = 87,5$
5	8	$(1 + 2\cdot 8)\cdot 5 = 17\cdot 5 = 85$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4 + 4,5)\cdot 5 = 22\cdot 5 = 110$
6	7	$(1 + 2\cdot 7)\cdot 6 = 15\cdot 6 = 90$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4)\cdot 6 = 17,5\cdot 6 = 105$
6	8	$(1 + 2\cdot 8)\cdot 6 = 17\cdot 6 = 102$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 4 + 4,5)\cdot 6 = 22\cdot 6 = 132$
10	3	$(1 + 2\cdot 3)\cdot 10 = 7\cdot 10 = 70$	$(1 + 1,5 + 2)\cdot 10 = 4,5\cdot 10 = 45$
10	4	$(1 + 2\cdot 4)\cdot 10 = 9\cdot 10 = 90$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5)\cdot 10 = 7\cdot 10 = 70$
11	3	$(1 + 2\cdot 3)\cdot 11 = 7\cdot 11 = 77$	$(1 + 1,5 + 2)\cdot 11 = 4,5\cdot 11 = 49,5$
11	4	$(1 + 2\cdot 4)\cdot 11 = 9\cdot 11 = 99$	$(1 + 1,5 + 2 + 2,5)\cdot 11 = 7\cdot 11 = 77$

Таким образом, при 1-м режиме разговоров выгоднее пользоваться услугами оператора «AX», при втором — услугами оператора «OX».

2) Используя расчёты, приведенные в таблице, достаточно сравнить стоимости звонков длительностью 5 и 6 минут.

«AX» — 5 мин $s_1 = 1 + 2\cdot 5 = 11$	«OX» — 5 мин $s_2 = 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 = 10$
«AX» — 6 мин $s_1 = 1 + 2\cdot 6 = 13$	«OX» — 6 мин $s_2 = 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 = 13,5$

Следовательно, при средней длительности не менее 6 мин выгоднее пользоваться услугами оператора «AX».

Ответ: 1) а) услугами оператора «AX»; б) услугами оператора «OX». 2) при средней длительности разговоров не менее 6 мин.

Комментарий:

В этой задаче 32% участников дали правильные ответы. Задача не требовала особых знаний и навыков. Необходимо было правильно рассчитать стоимость звонков для каждого описанного случая.

<u>Задача №2 (7 баллов)</u>

Длина и ширина помещения прямоугольной формы выражаются целыми числами метров. Численное значение его периметра (в м) отличается от численного значения площади (в м^2) на целое число.

1) Каковы размеры помещения, если численное значение его периметра (в м) отличается от численного значения площади (в м^2) на 7?
2) Каковы размеры помещения, если его длина в 3 раза больше ширины и периметр больше площади?
3) При каких размерах помещения его периметр больше площади, если выполнены условия задания и ширина больше 2 м?

Решение

Обозначим длину комнаты через *x* м, а ширину — через *y* м.

1) По условию, $2x + 2y = xy + p$, где p равно или 7 или – 7. Следовательно, $x = \frac{2y-p}{y-2} = 2 + \frac{4-p}{y-2}$. Если $p = 7$, то $x = 2 - \frac{3}{y-2}$ и натуральным может быть только при $y = 5$: $x = 2 - \frac{3}{5-2} = 1$. Следовательно, помещение имеет размеры 1 м × 5 м.

Если $p = -7$, $x = 2 + \frac{11}{y-2}$ и является натуральным при $y_1 = 3$ и $y_2 = 13$. Тогда $x_1 = 13$, $x_2 = 3$. Следовательно, помещение имеет размеры 3 м × 13 м.

2) По условию, $x = 3y$ и $2x + 2y = xy + p$, где p — целое положительное число. Имеем уравнение $6y + 2y = 3y^2 + p$ или $3y^2 - 8y + p = 0$.

Его дискриминант равен $D = 64 - 12p$. Он является квадратом натурального числа при положительных p только при $p = 4$ и при $p = 5$. Если $p = 4$, то $D = 16$ и $y_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{6}, y_1 = 2, x_1 = 6; y_2 = \frac{2}{3}, x_2 = 2$.

Если $p = 5$, то $D = 4$ и $y_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{6}, y_1 = \frac{5}{3}, x_1 = 5; y_2 = 1, x_2 = 3$. Следовательно, помещение имеет размеры или 2 м × 6 м, или 1 м × 3 м.

3) По условию, $2x + 2y = xy + p$, где p — целое положительное число. Тогда $x = \frac{2y-p}{y-2} = 2 + \frac{4-p}{y-2}$. Из условия следует, что $y \neq 1$. Тогда или $y = 3, x = 2 + 4 - p$, или $y = 4 - p + 2, x = 3$. Следовательно, помещение может иметь следующие размеры:

p	1	2	3
x м×y м	3 м × 7 м	3 м × 4 м	3 м × 3 м

Ответ: 1) 1 м × 5 м; 3 м × 13 м. 2) 2 м × 6 м; 1 м × 3 м. 3) 3 м × 7 м; 3 м × 4 м; 3 м × 3 м

Комментарий:

С этой задачей справились только 27% участников. Основная ошибка заключалась в том, что участники упускали возможные варианты. Например: в первом пункте они находили ответ, когда периметр на 7 больше площади, но не учитывали, что если периметр на 7 меньше площади, то возможен еще один ответ. Важно понимать, когда в задаче требуется найти один ответ, а когда все возможные. Ведь если нужны все возможные ответы, то нахождение одного из них без доказательства его единственности не считается полным решением задачи.

<u>Задача №3 (7 баллов)</u>

Имеются гирьки массой 1 г, 2 г, 3 г, …, *n* г.

1) Можно ли разложить гирьки на k равных по массе кучек, если: а) n = 51, k = 3; б)n=51, k = 13; в) n = 51, k = 39?
2) На сколько равных по массе кучек можно разложить все гирьки для n = 43?
3) Для каких значений п все гирьки можно разложить на 5 равных по массе кучек?

Решение

1) Найдём массу всех гирек:

1 + 2 + … + 51 = (1 + 51) + (2 + 50) + (3 + 49) + … + (25 + 27) + 26 = 25·52 + 26 = 51·26 г. Следовательно, если можно разложить 51 гирьку на *k* равных по массе кучек, то *k* должно быть делителем числа $51\cdot 26$.

а) Если *k* = 3, то масса каждой кучки должна равняться 51·26:3 = 442 г. Нетрудно убедиться, что гирьки 1 г, 2 г, …, 9 г можно разложить на три равные по массе кучки: 9 + 6 = 8 + 7 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1.

Гирьки 10 г, 11 г, 12 г, 13 г, 14 г, 15 г можно разложить на три равные по массе кучки: 10 + 15 = 11 + 14 = 12 + 13.

Если соединить два указанных разложения, то получим разложение гирек на кучки при *n*=15. Аналогичными рассуждениями за ещё 6 таких соединений можно разложить все гирьки 1 г, …, 51 г.

б) Если *k* = 13, то масса одной кучки равна 102 г. Гирьки 1 г, …, 25 г можно разложить на 13 равных по массе кучек: 25 = 24 + 1 = 23 + 2 = … = 13 + 12.

26 гирек 26 г, …, 51 г можно разложить на 13 равных по массе кучек: 26 + 51 = 27 + 50 = … = 38 + 39. Соединив эти разложения, получим разложение гирек 1 г, …, 51 г на 13 равных по массе кучек.

в) Число $51\cdot 26:39=34$ меньше массы некоторых гирек. Поэтому на 39 равных по массе кучек нельзя разложить все гирьки.

2) Найдём массу всех 43 гирек: 1 + 2 + … + 43 = (1 + 43) + (2 + 42) + … + (21 + 23) + 22 = 22·43 = 946. Число 946 делится на 2, 11, 22, 43, 86, 473. Частное от деления на делители большие 22 меньше массы некоторых гирек. Поэтому эти делители не могут быть количеством кучек равных масс, на которые разложимы все гирьки.

Делители 2, 11, 22 могут быть количеством кучек равных масс, на которые разложимы все гирьки. Масса всех гирек равна 946 г. Разложить на две равные кучки нетрудно. Если кучек 22, то масса каждой кучки равна 43 г. Так как 43=42 + 1 = 41 + 2= … =23 + 20 = 22 + 21, то такое разложение возможно. Соединив пары кучек в одну, получим 11 кучек, равных по массе.

3) Найдём массу всех гирек: $1+2+...+n+(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+...=$

$$=\begin{cases} k(n+1)=\dfrac{n}{2}(n+1),\ \text{если}\, n=2k, \\ k(n+1)+k+1=kn+2k+1=\dfrac{n(n+1)}{2},\ \text{если}\, n=2k+1. \end{cases}$$

Рассмотренные ранее случаи приводят к гипотезе, что указанное разложение возможно, если n или n+1 делятся на 5 и частное $\dfrac{n(n+1)}{2}:5$ больше или равно n, т. е. n≥9.

Пусть 5 является делителем n или n + 1. Тогда массу всех гирек можно разделить на 5 равных частей. Возможность разложения гирек при n = 9, n = 10, n = 14 и n = 15 следует из равенств: 9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4; 10 + 1= 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5;

14 + 7 = 13 + 8 = 12 + 9 = 11 + 10 = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1;

15 + 9 = 14 + 10 = 13 + 11 = 12 + 8 + 4 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2 + 1.

Так как 10 гирек, массы которых выражаются 10-ю последовательными числами, можно всегда разложит на 5 равных по массе кучек, то, пользуясь приведенными разложениями, можно разложить все гирьки при n или n + 1 кратным 5.

Ответ: 1 а) Да; б) Да; в) Нет. 2) 2, 11, 22. 3) Для n или n + 1 кратным 5.

Комментарий:

Эта задача оказалась самой сложной в конкурсе. Ее смогли решить только 14% участников. Многие приводили ответ без каких-либо объяснений, что не считается решением задачи в целом. Старайтесь оформлять решения максимально подробно там, где это требуют условия конкурса. За излишнюю подробность в решении баллы не снимаются, а вот если ваше решение будет неполным, то вы не получите за него полный балл.

ЗНАНИКА

Электронная школа Знаника

znanika.ru