Карта сокровищ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор задач тестовой части заданий. 4-5 классы

Задача №1 (2 балла)

Во сколько раз минутная стрелка двигается быстрее часовой?

А. В 6 раз Б. В 9 раз В. В 10 раз Г. В 12 раз

Решение

Часовая стрелка делает один оборот за 12 ч, а минутная — за 1 ч. Следовательно, минутная стрелка двигается быстрее часовой в 12:1 = 12 раз.

Ответ: Г. В 12 раз

Комментарий:

В этой задаче 94% участников указали правильный ответ. Простая задача, для ее решения можно было рассматривать различные промежутки времени, будь то час, 12 часов или сутки. Нужно было только правильно посчитать разницу пройденных стрелками путей за выбранный временной период.

Задача №2 (2 балла)

Старые часы отстают на 20 секунд за 1 час. На сколько минут отстанут эти часы через 24 часа после того, как они будут поставлены правильно?

А. На 7 мин. Б. На 8 мин. В. На 9 мин. Г. На 10 мин.

Решение

Через 24 часа после того, как часы будут поставлены правильно, они отстанут на $20 \cdot 24 = 480$ с = 8 мин.

Ответ: Б. На 8 мин

Комментарий:

С этой задачей справились практически все (96%) участники. Необходимо было только правильно перемножить числа и не ошибиться при переводе размерности из секунд в минуты.

Задача №3 (2 балла)

Одни из двух часов отстают на 25 минут и показывают 7 ч 40 мин. Какое время показывают вторые часы, если они спешат на 15 минут?

А. 7 ч 15 мин. Б. 7 ч 25 мин. В. 8 ч. 5 мин. Г. 8 ч 20 мин.

Решение

Вторые часы идут впереди первых на 15 + 25 = 40 мин. В то время, когда первые часы показывают 7 ч 40 мин, вторые покажут 7 ч 40 мин + 40 мин = 8 ч 20 мин.

Ответ: Г. 8 ч 20 мин

Комментарий:

Эту задачу решили 94% участников. Особых знаний и навыков тут не требовалось, нужно было просто правильно все сложить.

Задача №4 (2 балла)

Сколько раз за сутки (с 00:00:00 до 23:59:59) минутная стрелка на механических часах совпадает с часовой?

А. 25 Б. 24 В. 23 Г. 22

Решение

Каждый час, начиная с 00:00:00, заканчивая 23:59:59, есть ровно один момент времени, когда часовая и минутная стрелки совпадают, за исключением двух часов с 11:00:00 до 11:59:59 и с 23:00:00 до 23:59:59. В эти 2 часа часовая и минутная стрелки не совпадают ни разу. Таким образом, за сутки будет ровно 22 момента, когда стрелки совпадут.

Ответ: Г. 22.

Комментарий:

Правильно решить данную задачу смогли далеко не все. Основная ошибка заключалась в том, что участники не учли, что стрелки часов пересекаются не каждый час. В результате чего выбрали ответ Б.24.

<u>Задача №5 (2 балла)</u>

На фабрике специальная машинка разрезает за час 500 восьмиметровых лент на одинаковые ленточки по 2 м в каждой. Сколько времени потребуется, чтобы на той же машинке разрезать 400 десятиметровых лент такой же ширины на такие же ленточки?

А. 60 мин. Б. 62 мин. В. 64 мин. Г. 70 мин.

Решение

Восьмиметровую ленту на двухметровые ленты разрезают тремя разрезами. Чтобы разрезать 500 восьмиметровых лент на двухметровые ленты требуется $3\cdot 500=1500$ разрезов. Для разрезания 400 десятиметровых лент на двухметровые ленты требуется $4\cdot 400=1600$ разрезов. Время, необходимое для этого, составляет $60:1500\cdot 1600=64$ минуты.

Ответ: В. 64 мин

Комментарий:

Эту задачу решили правильно только 40% участников. Многие выбрали ответ А.60. Видимо из-за того, что количество двухметровых ленточек в итоге должно получиться таким же. Но они не учли, что количество разрезов для этого потребуется другое.

<u>Задача №6 (2 балла)</u>

Надя разрезала несколько длинных лент на короткие ленточки. Всего она сделала 20 разрезов и получила 28 ленточек. Надя резала ленты только поперек. Сколько длинных лент она разрезала?

А. 8. Б. 10. В. 12. Г. 14.

Решение

При разрезании каждой ленты количество ленточек на 1 больше количества разрезов. Так как при разрезании каждой ленты количество ленточек на 1 больше количества разрезов, то количество больших лент равно 28 – 20 = 8.

Ответ: А. 8.

Комментарий:

В этой задаче очень важно понять, что количество получившихся ленточек не зависит от того, какую ленту резать очередным разрезом, ведь после каждого разрезания ленточек становится больше на одну. Эту задачу решили 90% участников.

Задача №7 (2 балла)

Сколькими различными способами из 2 длинных лент можно получить 8 ленточек, если разрезать каждую ленту? Резать ленты можно только поперек. Два способа считаются различными, если они отличаются количеством разрезов хотя бы одной ленты.

А. 6-ю. Б. 5-ю. В. 4-мя. Г. 3-мя.

Решение

Из 2 длинных лент можно получить 8 ленточек, сделав 8 – 2 = 6 разрезов. Эти 6 разрезов могут распределиться между 2 лентами следующими различными способами: 5 + 1, 4 + 2, 3 + 3, 2 + 4 или 1 + 5. Всего 5 способов.

Ответ: Б. 5-ю.

Комментарий:

Задача на комбинаторику. Она оказалась самой сложной в тестовой части. Ее смогли решить только 24% участников. Сложно предположить, какие именно ошибки допускали участники при решении этой задачи, ведь приводить решение тут не требовалось.

Задача №8 (2 балла)

Имеется некоторое количество лент длиной 10 м и столько же лент длиной 12 м общей длиной 132 м. Сколько разрезов без наложения лент придётся сделать, чтобы разрезать все ленты на ленточки длиной 2 м?

А. 61. Б. 54. В. 45. Г. 40.

Решение

Если взять по одной ленте каждого размера, то сумма их длин равна 22 м, значит, количество лент каждого размера равно 132:22 = 6. При разрезании ленты длиной 10 м на двухметровые приходится делать $10:2-1=4$ разреза, а при разрезании ленты длиной 12 м на двухметровые приходится делать $12:2-1=5$ разрезов.

Общее количество разрезов равно $4\cdot6+5\cdot6=54$.

Ответ: Б. 54.

Комментарий:

С этой задачей справились 87% участников. Правильно посчитав количество лент каждого размера, найти ответ становится не сложно.

Задача №9 (2 балла)

Имеется 3 фотографии неизвестных учащихся и 3 их ученических билета, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в ученические билеты?

А. 12. Б. 6. В. 4. Г. 3.

Решение

Обозначим учащихся числами 1,2,3, а их фотографии — соответственно буквами а, б, в. Тогда все различные варианты вложения фотографий в ученические билеты будут выглядеть так:

1а	1а	1б	1б	1в	1в
2б	2в	2а	2в	2а	2б
3в	3б	3в	3а	3б	3а

Каждый столбец описывает один вариант вложения фотографий. Всего 6 вариантов.

Ответ: Б. 6.

Комментарий:

Еще одна задача на комбинаторику. Правильный ответ здесь выбрали 84% участников. В авторском решении задача решена перебором, но есть и альтернативный способ. Количество вариантов вложить первую фотографию в ученический билет равно 3 (количество ученических билетов без фотографии), после чего есть 2 варианта вложить еще одну фотографию в билет, и, наконец, для последней фотографии останется только один вариант. Таким образом, количество способов разложить фотографии по ученическим билетам равно 3*2*1 = 6.

Задача №10 (2 балла)

Имеется 3 фотографии неизвестных учащихся и 3 их ученических билета, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в ученические билеты, при которых ровно двум владельцам билетов вложены их фотографии?

А. 0. Б. 1. В. 2. Г. 3.

Решение

Если правильно вложены 2 фотографии в ученические билеты, то правильным окажется и 3-е вложение. Следовательно, вариантов вложения фотографий в ученические билеты, в которых ровно двум владельцам билетов вложены их фотографии, не существует.

Ответ: А. 0.

Комментарий:

С этой задачей справились чуть меньше половины (46%) участников. Многие выбрали ответ Г.3. Осмелюсь предположить, что их рассуждения были примерно следующими: у двоих владельцев ученических билетов вложена правильная фотография, значит у одного неправильная. Это может быть один из трех владельцев билетов, значит ответ 3. Но они не учли, что вариант, при котором в одном только ученическом билете фотография неправильная попросту невозможен.

Задача №11 (2 балла)

Имеется 3 фотографии неизвестных учащихся и 3 их ученических билета, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в ученические билеты, при которых неправильно вложены все фотографии?

А. 0. Б. 1. В. 2. Г. 3.

Решение

Обозначим учащихся числами 1,2,3, а их фотографии — соответственно буквами а, б, в. Условию удовлетворяют следующие вложения: 1б, 2в, 3а и 1в, 2а, 3б. Всего 2 варианта.

Ответ: В. 2.

Комментарий:

В этой задаче 69% участников выбрали правильный ответ. Альтернативный метод решения заключается в том, что для первой фотографии есть 2 варианта неправильного вложения в ученический билет. После чего, вложение остальных фотографий определяется однозначно. Значит ответ 2.

Задача №12 (2 балла)

Имеется 3 фотографии неизвестных учащихся и 3 их ученических билета, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в ученические билеты, в которых правильно вложена ровно одна фотография?

А. 0. Б. 1. В. 2. Г. 3.

Решение

Обозначим учащихся числами 1,2,3, а их фотографии — соответственно буквами а, б, в. Условию удовлетворяют следующие вложения:

1) 1а, 2в, 3б;
2) 1в, 2б, 3а;
3) 1б, 2а, 3в.

Всего 3 варианта.

Ответ: Г. 3.

Комментарий:

С этой задачей справились 64% участников. После того, как одну фотографию вкладываешь правильно, вложение остальных фотографий определяется однозначно. Таким образом, ответ равен количество способов выбора фотографий, которая будет вложена правильно, то есть 3.

Разбор задач тестовой части заданий. 6-7 классы

Задача №1 (2 балла)

Минутная стрелка за 20 минут повернулась на некоторый угол. За какое время на тот же угол повернётся часовая стрелка?

А. За 200 мин. Б. За 220 мин. В. За 240 мин. Г. За 260 мин.

Решение

За 20 минут минутная стрелка проходит путь равный 20 минутным делениям, что есть 4 часовых деления. Значит, часовая стрелка этот путь пройдет за 4 часа или 240 минут.

Ответ: В. За 240 мин.

Комментарий:

Эта задача оказалась самой простой. Правильный ответ в ней указали 93% участников. Решать ее можно было различными способами. Например: часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной стрелки, так как полный круг она проходит за 12 часов, а минутная за это время проходит 12 кругов. На искомый угол часовая стрелка повернется за 20*12 = 240 минут.

Задача №2 (2 балла)

Какой угол образуют между собой минутная и часовая стрелки в 5 ч 40 мин?

А. 65°. Б. 70°. В. 75°. Г. 80°.

Решение

В 5 часов угол между часовой и минутной стрелками равен 150°. За 40 минут часовая стрелка повернётся на угол $0{,}5^\circ \cdot 40 = 20^\circ$, а минутная стрелка за это время повернётся на угол $6^\circ \cdot 40 = 240^\circ$. Угол между стрелками составит $240^\circ - (150^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$.

Ответ: Б. 70°.

Комментарий:

В этой задаче 70% участников выбрали верный ответ. Здесь тоже есть различные методы решения. Не обязательно считать на какой угол поворачивается каждая стрелка за минуту. Угол между двумя часовыми делениями равен 360/12 = 30 градусов. С пяти часов вечера, когда угол между стрелками равен 150 градусов, за 40 минут часовая стрелка пройдет 2/3 данного угла, то есть 20 градусов. Минутная стрелка пройдет 8*30 = 240 градусов и обгонит часовую стрелку. Значит, между стрелками угол будет $240^\circ - (150^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$.

Задача №3 (2 балла)

Антон поставил стрелку будильника на 6 часов утра, но проснулся немного раньше (после 5 часов) и заметил, что часовая стрелка делит угол между стрелкой будильника и минутной стрелкой пополам. Когда проснулся Антон?

А. В 5 ч 22 мин. Б. В 5 ч 23 мин. В. В 5 ч 24 мин. Г. В 5 ч 25 мин.

Решение

По условию, часовая стрелка находится между числами 5 и 6. Этот промежуток циферблата минутными делениями разделён на 5 частей, каждую из которых часовая стрелка проходит за 60:5 = 12 мин. Если часовая стрелка стоит на делении 26 мин, то минутная — на 12 мин, и часовая стрелка не делит угол между минутной стрелкой и стрелкой будильника пополам. А деление в 27 мин для часовой стрелки подходит, так как минутная стрелка покажет $2 \cdot 12 = 24$ мин, и деление 27 мин находится как раз посередине между делениями 24 мин и 30 мин (6 ч). Итак, Антон проснулся в 5 ч 24 мин.

Ответ: В. В 5 ч 24 мин.

Комментарий:

Эту задачу решили 63% участников. В авторском решении задача решена перебором, но можно было решить ее и с помощью уравнения. Обозначим за x – количество минут, которые прошли после 5 часов до момента, когда Антон проснулся. Угол между минутной и стрелкой будильника в 5 часов равен 180°. Угол между часовой стрелкой и стрелкой будильника в 5 часов равен 30°. В момент, когда Антон проснулся, первый угол в 2 раза больше второго, а так как за минуту часовая стрелка проходит 0,5°, а минутная стрелка 6°, то получаем уравнение 180 – 6*x = 2*(30 – 0,5x). Решая данное уравнение, получим x = 24. Значит, Антон проснулся в 5 ч 24 мин.

<u>Задача №4 (2 балла)</u>

В какое время между 5 ч и 6 ч угол между минутной и часовой стрелками будет составлять 40° впервые за этот час?

А. В 5 ч 40 мин. Б. В 5 ч 34 мин. В. В 5 ч 25 мин. Г. В 5 ч 20 мин.

Решение

Пусть искомое время равно 5 ч x мин, где $0 < x < 60$. Возможны 2 случая: 1) $0 < x \leq 30$; 2) $30 < x < 60$. В 5 часов угол между стрелками составляет 150°. За x мин часовая стрелка повернётся на угол, равный $0,5x°$, а минутная — на $6x°$.

Если $0 < x < 30$, то угол между стрелками составит $150° + 0,5x° - 6x°$, что, по условию, равно 40°. Имеем уравнение $150° - 5,5x° = 40°$. Отсюда $x = 20$. Следовательно, угол между стрелками будет составлять 40° в 5 ч 20 мин.

Поскольку требуется найти искомое время, наступившее впервые за рассматриваемый час, то второй случай можно не рассматривать.

Ответ: Г. В 5 ч 20 мин.

Комментарий:

С этой задачей справились 80% участников. Здесь тоже есть различные способы решения задачи. Вот один из них. После ровно 5 часов, минутная стрелка «догоняет» часовую стрелку со скоростью 5,5 градусов в минуту. В 5 часов угол между стрелками равен 150 градусов. Значит, 40 градусов он будет через (150 - 40)/5,5 = 20 минут.

<u>Задача №5 (2 балла)</u>

На уроке ученик должен решить 8 задач, за каждую из которых он может получить от двух до пяти баллов. За некоторые 6 задач его средняя оценка равнялась 4,5 балла. Какой может быть сумма баллов за остальные 2 задачи, чтобы средняя оценка была 4 балла?

А. 5. Б. 6. В. 7. Г. 8.

Решение

Так как среднее арифметическое нескольких чисел равно частному от деления их суммы на их количество, то сумма этих чисел равна произведению их среднего арифметического на их количество. Поэтому сумма баллов, полученных за решение 6 задач равна $4,5 \cdot 6 = 27$. Для того, чтобы средний балл за 8 задач равнялся 4, необходимо, чтобы сумма баллов, набранных за решение 8 задач, равнялась $4 \cdot 8 = 32$. Тогда сумма баллов за решение двух последних задач должна равняться $32 - 27 = 5$.

Ответ: А. 5.

Комментарий:

Две трети участников (67%) справились с данной задачей. Задача решается простым уравнением 6*4,5 + x = 8*4, где x – сумма баллов за остальные 2 задачи. Решив уравнение, получаем x = 5.

<u>Задача №6 (2 балла)</u>

На школьной математической олимпиаде каждый член жюри оценивал успехи участников целым количеством баллов. Средний балл одного участника равнялся 5,625. Какое наименьшее количество человек могло быть в жюри?

А. 16. Б. 12. В. 8. Г. 4.

Решение

Так как каждый член жюри оценивал успехи участников целым количеством баллов, то сумма баллов, поставленных всеми членами жюри, также должна выражаться целым числом. Но сумма баллов, поставленных всеми членами жюри, равна произведению среднего арифметического баллов на количество членов жюри. Произведение числа 5,625 ни на одно из чисел, от 1 до 7, не равно целому числу, а при умножении на 8 дает целое число $5{,}625 \cdot 8 = 45$. Следовательно, наименьшее количество членов жюри равно 8.

Ответ: В. 8.

Комментарий:

С этой задачей справились почти все. 90% участников выбрали здесь правильный вариант ответа. При решении данной задачи можно было просто перебрать предложенные варианты начиная с наименьшего. 5,625*4 = 22,5 – не целое число. 5,625*8 = 50 – целое число. Варианты 12 и 16 теперь можно даже не рассматривать.

<u>Задача №7 (2 балла)</u>

По результатам контрольной работы в классе средний балл у мальчиков оказался равным 8,6, у девочек — 9,8, а средний балл у всех учащихся класса — 9,4. Какую часть учащихся класса составляют мальчики?

А. $\frac{1}{4}$. Б. $\frac{1}{3}$. В. $\frac{1}{2}$. Г. $\frac{2}{3}$.

Решение

Обозначим количества мальчиков и девочек в классе через x и у соответственно, тогда количество учащихся класса равно x + у. Так как сумма баллов, набранных учащимися, равна произведению среднего арифметического баллов на количество учащихся, то мальчики набрали $8{,}6x$ баллов, девочки — $9{,}8y$ баллов, а все учащиеся класса — $9{,}4(x+y)$. Имеем уравнение: $8{,}6x + 9{,}8y = 9{,}4(x+y)$, или $0{,}8x = 0{,}4y$, или $y = 2x$. Следовательно, отношение количества мальчиков к общему количеству учащихся класса равно $\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+2x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$.

Ответ: Б. $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

Комментарий:

Эту задачу решили 77% участников. Как и в предыдущей задаче, здесь можно было воспользоваться предложенными вариантами ответов. Допустим, мальчики составляют $\frac{1}{4}$ класса. Тогда средний балл всех учащихся можно рассчитать так (8,6 + 3*9,8)/4 = 9,5. Аналогично для остальных вариантов ответа. Только вариант Б. $\frac{1}{3}$ удовлетворяет условию (8,6 + 2*9,8)/3 = 9,4. Очень часто наличие вариантов ответа заметно упрощает решение той или иной задачи, не забывайте об этом.

Задача №8 (2 балла)

В школьной математической олимпиаде участвовало 10 учащихся 6-го класса. Все они набрали различное количество баллов, которые выражаются натуральными числами. Среднее арифметическое набранных всеми участниками баллов равно 10. Какое наибольшее количество баллов мог набрать участник олимпиады?

А. 10. Б. 45. В. 50. Г. 55.

Решение

Поскольку в школьной математической олимпиаде участвовало 10 учащихся, а среднее арифметическое набранных баллов равно 10, то сумма баллов, набранных всеми учащимися, равна $10 \cdot 10 = 100$. Требуется найти, какое наибольшее количество баллов мог набрать участник олимпиады из всех возможных. Это могло произойти тогда, когда остальные участники набрали наименьшее возможное количество баллов. Так как все участники набрали различное количество баллов, выражаемых натуральными числами, то это могло произойти тогда, когда остальные 9 участников набрали 1, 2, 3, …, 9 баллов. Их сумма равна 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. Тогда 10-й участник набрал $100 - 45 = 55$ баллов. Следовательно, наибольшее количество баллов, которое мог набрать участник олимпиады равно 55.

Ответ: Г. 55.

Комментарий:

С этой задачей также справились 77% участников. Для решения данной задачи достаточно построить пример.

Задача №9 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в паспорта?

А. 4. Б. 8. В. 15. Г. 24.

Решение

Обозначим паспорта числами 1, 2, 3, 4, а соответствующие им фотографии — буквами а, б, в, г. Тогда все различные варианты вложения фотографий в паспорта будут выглядеть так:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1а	1а	1а	1а	1а	1а	1б	1б	1б	1б	1б	1б
2б	2б	2в	2в	2г	2г	2а	2а	2в	2в	2г	2г
3в	3г	3б	3г	3б	3в	3в	3г	3а	3г	3а	3в
4г	4в	4г	4б	4в	4б	4г	4в	4г	4а	4в	4а

13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
1в	1в	1в	1в	1в	1в	1г	1г	1г	1г	1г	1г
2а	2а	2б	2б	2г	2г	2а	2а	2б	2б	2в	2в
3б	3г	3а	3г	3а	3б	3б	3в	3а	3в	3а	3б
4г	4б	4г	4а	4б	4а	4в	4б	4в	4а	4б	4а

Или количество вариантов можно посчитать как $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ответ: Г. 24.

Комментарий:

Стандартная задача на комбинаторику. Правильный ответ в ней указали 78% участников. В задаче требуется найти количество вариантов расположить по порядку 4 различных между собой объекта. Для решения подобных задач существует простая формула $A_n=n!=1*2*…*n$, где n – количество объектов, которые необходимо упорядочить. В данном случае n = 4, а n! = 1*2*3*4 = 24.

Задача №10 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в паспорта, при которых неправильно вложены все фотографии?

А. 3. Б. 6. В. 9. Г. 18.

Решение

Используем обозначения и решение задания 9. Условию удовлетворяют следующие варианты:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1б	1б	1б	1в	1в	1в	1г	1г	1г
2а	2в	2г	2а	2г	2г	2а	2в	2в
3г	3г	3а	3г	3б	3а	3б	3а	3б
4в	4а	4в	4б	4а	4б	4в	4б	4а

Всего 9 вариантов удовлетворяют условию.

Ответ: В. 9.

Комментарий:

55% участников смогли решить данную задачу. Задачу можно было решить и без перебора вариантов. Воспользуемся обозначениями из авторского решения. Для фотографии а есть 3 варианта неправильного вложения в паспорт. Для каждого из этих вариантов есть 3 варианта неправильного вложения фотографии, в чьем паспорте лежит фотография а. Остальные две фотографии можно положить в паспорта неправильно только одним способом (можете убедиться в этом на примере самостоятельно). Таким образом, ответом в задаче будет 3*3 = 9.

Задача №11 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в паспорта, при которых ровно трём владельцам паспортов вложены их фотографии?

А. 0. Б. 1. В. 2. Г. 3.

Решение

Если правильно вложены в паспорта 3 фотографии, то правильно будет вложена и 4-я фотография. Следовательно, вариантов, в которых правильно вложены ровно три фотографии, не существует.

Ответ: А. 0.

Комментарий:

С этой задачей справились 59% участников. Многие посчитали, что правильного ответа нет среди предложенных вариантов, посчитав правильным ответом 4. Осмелюсь предположить, что их рассуждения были примерно следующими: у троих владельцев паспортов правильно вложены фотографии, а у одного нет. Количество вариантов выбора владельца с неправильной фотографией равно 4. Но они не учли, что вариант, при котором в одном только паспорте фотография неправильная, попросту невозможен.

Задача №12 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Сколько существует всего различных вариантов вложения фотографий в паспорта, при которых правильно вложена ровно одна фотография?

А. 4. Б. 8. В. 12. Г. 16.

Решение

Используем обозначения и решение задания 9. Условию удовлетворяют следующие варианты:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1а	1а	1б	1б	1в	1в	1г	1г
2в	2г	2в	2г	2а	2б	2а	2б
3г	3б	3а	3в	3б	3г	3в	3а
4б	4в	4г	4а	4г	4а	4б	4в

Всего 8 вариантов удовлетворяют условию.

Ответ: Б. 8.

Комментарий:

С этой задачей также справились 59% участников. Для решения данной задачи достаточно посчитать количество способов разложить 3 фотографии в 3 паспорта, так чтобы все фотографии были вложены неправильно, после чего умножить это число на 4, так как существует 4 варианта выбора паспорта, в котором будет правильная фотография. Итак, количество вариантов неправильного вложения трех фотографий в 3 паспорта равно двум, так как первый паспорт мы можем неправильно вложить двумя способами, после чего вложение остальных фотографий определяется однозначно. Таким образом ответом в задаче будет 2*4=8.

Разбор задач тестовой части заданий. 8-9 классы

Задача №1 (2 балла)

Какое точное время между 6 и 7 часами показывают часы, когда положения их часовой и минутной стрелок совмещаются?

А. 6 ч $11\frac{8}{11}$ мин. Б. 6 ч $22\frac{3}{11}$ мин. В. 6 ч $27\frac{4}{11}$ мин. Г. 6 ч $32\frac{8}{11}$ мин.

Решение

В 6 часов часовая и минутная стрелки направлены в противоположные стороны. Пусть часы показывают 6 часов и x минут (x — время от 6:00 до момента времени, когда положения стрелок совмещаются). За x минут минутная стрелка пройдет $\frac{x}{60}$ часть круга (за 60 мин она проходит круг), а часовая стрелка пройдет $\frac{x}{60\cdot 12}$ часть круга. Разность этих частей дуг является полукругом (путь от противоположных положений до совмещения), то есть $\frac{x}{60}-\frac{x}{60\cdot 12}=\frac{1}{2}$ или $x-\frac{x}{12}=30$. Отсюда $x=\frac{12\cdot 30}{11}=32\frac{8}{11}$ мин.

Ответ: Г. 6 ч $32\frac{8}{11}$ мин.

Комментарий:

Правильный ответ в этой задаче выбрали 92% участников. По идее это стандартная задача на движение, где один объект догоняет другой, их скорости заданы, и требуется найти время, за которое первый объект догонит второй. Подобные задачи просто необходимо уметь решать, на конкурсах по математике они встречаются сплошь и рядом.

Задача №2 (2 балла)

В 12 часов дня часовая и минутная стрелки совмещаются. В какое точное время впервые после полудня стрелки снова совместятся?

А. В 12 ч $54\frac{6}{11}$ мин. Б. В 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин. В. В 13 ч $55\frac{5}{11}$ мин. Г. В 14 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

Решение

Часовая стрелка совершает полный оборот за 12 часов, скорость её движения равна $\frac{1}{12}$ об./ч = $\frac{1}{60\cdot 12}$ об/мин. Минутная стрелка совершает полный оборот за 1 час, скорость её движения равна 1 об./ч = $\frac{1}{60}$ об/мин. Минутная стрелка удаляется от часовой со скоростью $\frac{1}{60}-\frac{1}{60\cdot 12}=\frac{11}{60\cdot 12}$ об./мин.

Она догонит часовую стрелку (на следующем круге) через $1:\frac{11}{60\cdot 12}=\frac{720}{11}=65\frac{5}{11}$ мин.

Впервые после полудня стрелки снова совместятся в 12 ч + $65\frac{5}{11}$ мин = 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

Ответ: Б. В 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

Комментарий:

Задача аналогичная предыдущей. С нею также справились 92% участников.

Задача №3 (2 балла)

Около половины седьмого вечера Петя посмотрел на часы: минутная стрелка была ровно на 3 минутные деления впереди часовой стрелки. Какое время показывали часы?

А. 18 ч 30 мин. Б. 18 ч 33 мин. В. 18 ч 34 мин. Г. 18 ч 36 мин.

Решение

Понятно, что около половины седьмого вечера часы показывали 18 часов с минутами. Выясним, сколько минутных делений (обозначим это количество через *n*) успела пройти минутная стрелка после 18 часов. Часовая стрелка двигается в 12 раз медленнее минутной, следовательно, она за это же самое время прошла $\frac{n}{12}$ делений. Поскольку от начала часа минутная стрелка прошла на 33 деления больше, чем часовая (в начале часа она отставала на 30 делений, а в конце уже была на 3 деления впереди), то получаем уравнение $n = \frac{n}{12} + 33$, откуда $n = 36$

Ответ: Г. 18 часов 36 мин.

Комментарий:

Задача аналогичная первым двум. Разница лишь в том, что надо найти не момент встречи, а момент, когда один объект обгонит другой на заданное расстояние. Метод решения от этого не меняется. Эту задачу смогли решить 55% участников.

Задача №4 (2 балла)

Через сколько минут часовая и минутная стрелки будут направлены в противоположные стороны впервые после того, как они совместились?

А. Через $27\frac{4}{11}$ мин. Б. Через $30\frac{4}{11}$ мин. В. Через $32\frac{8}{11}$ мин. Г. Через 36 мин.

Решение

Часовая стрелка совершает полный оборот за 12 часов, скорость её движения равна $\frac{1}{12}$ об./ч = $\frac{1}{60 \cdot 12}$ об/мин. Минутная стрелка совершает полный оборот за 1 час, скорость её движения равна 1 об./ч = $\frac{1}{60}$ об/мин. Минутная стрелка удаляется от часовой со скоростью $\frac{1}{60} - \frac{1}{60 \cdot 12} = \frac{11}{60 \cdot 12}$ об./мин.

Чтобы стрелки стали направлены в противоположные стороны, необходимо чтобы прошло $\frac{1}{2} : \frac{11}{60 \cdot 12} = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ мин.

Ответ: В. Через $32\frac{8}{11}$ мин.

Комментарий:

Еще одна задача на движение с подобным условием. Здесь правильный ответ выбрали 79% участников.

<u>Задача №5 (2 балла)</u>

Один мотоциклист преодолел расстояние между двумя пунктами за 1 ч 30 мин, а второй — за 1 ч 12 мин. Во сколько раз скорость второго мотоциклиста больше скорости первого?

А. В 1,25 раза. Б. В 1,3 раза. В. В 1,35 раза. Г. В 1,4 раза.

Решение

Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч. При постоянном расстоянии скорости движения двух тел обратно пропорциональны значениям времени, за которое они преодолели это расстояние, то есть $\frac{v}{w}=\frac{1{,}2}{1{,}5}=\frac{4}{5}$.

Следовательно, скорость первого мотоциклиста относится к скорости второго мотоциклиста, как 4:5. Скорость второго мотоциклиста больше скорости первого в 5:4 = 1,25 раза.

Ответ: А. В 1,25 раза.

Комментарий:

Эта задача оказалась самой простой. Правильный ответ в ней выбрали 97% участников. Для удобства решения данной задачи можно было задать расстояние, которое проехали мотоциклисты, ответ от этого не зависит. Например: если задать расстояние 72 км, тогда скорость первого будет 72/1,5 = 48 (км/ч). Скорость второго будет 60 км/ч. 48/60 = 4/5, ответ в 1,25 раз.

<u>Задача №6 (2 балла)</u>

Из А в В и из В в А выехали одновременно два мотоциклиста. Первый мотоциклист преодолел расстояние между А и В за 2 ч 15 мин, а второй — за 1 ч 48 мин. Через какое время после выезда они встретились?

А. Через 45 мин. Б. Через 1 ч. В. Через 1 ч 15 мин. Г. Через 1,5 ч.

Решение

Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч, расстояние от А до В — через s км. Скорости мотоциклистов соответственно равны: $v=\frac{s}{2{,}25}км/ч$, $w=\frac{s}{1{,}8}км/ч$. При движении двух тел навстречу друг другу скорость сближения равна сумме их скоростей, то есть мотоциклисты сближаются со скоростью $\frac{s}{2{,}25}+\frac{s}{1{,}8}=\frac{s}{\frac{9}{4}}+\frac{s}{\frac{9}{5}}=s\ \ км/ч$. Следовательно, расстояние s км они преодолеют за s : s = 1 ч.

Это значит, что они встретятся через 1 час.

Ответ: Б. Через 1 ч.

Комментарий:

Эту задачу решили правильно 79% участников. Аналогично предыдущей задаче здесь можно было задать расстояние для удобства. Чтобы расчеты были более простыми, расстояние удобно задать численно равным наименьшему общему кратному двух периодов времени. Первый мотоциклист преодолел расстояние за 135 мин, второй за 108. НОК этих чисел 540. Тогда скорости будут равны 240 км/ч и 300 км/ч. Очевидно, что, двигаясь на встречу друг другу с такими скоростями, мотоциклисты встретятся через час.

Задача №7 (2 балла)

Из А в В и из В в А выехали одновременно два мотоциклиста. Первый прибыл в В через 2,5 ч после встречи со вторым, а второй прибыл в А через 1 ч 36 мин после встречи с первым. Сколько часов был в пути каждый мотоциклист?

А. 4,5 ч и 3,6 ч. Б. 4,6 ч и 3,5 ч. В. 4,1 ч и 3,9 ч. Г. 4,9 ч и 3, 1 ч.

Решение

Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч, время, которое мотоциклисты ехали до встречи, — через t ч. Первый мотоциклист до встречи проехал vt км, а второй — wt км. Первый мотоциклист после встречи за 2,5 ч проехал wt км, следовательно, он ехал со скоростью $\frac{wt}{2,5}$ км/ч. Имеем уравнение: $\frac{wt}{2,5} = v$. Аналогично, второй мотоциклист после встречи за 1,6 ч проехал vt км, следовательно, он ехал со скоростью $\frac{vt}{1,6}$ км/ч. Имеем уравнение: $\frac{vt}{1,6} = w$. Выразив t из каждого из этих уравнений получим: $t = \frac{2,5}{w} = \frac{1,6w}{v}$. Отсюда $\left(\frac{v}{w}\right)^2 = 0,64$; $\frac{v}{w} = 0,8$; $t = 2$ ч. Следовательно, первый мотоциклист был в пути 2 + 2,5 = 4,5 ч, а второй — 2 + 1,6 = 3,6 ч.

Ответ: А. 4,5 ч и 3,6 ч.

Комментарий:

С этой задачей справились 74% участников. Альтернативный метод решения, описанный в предыдущих задачах, здесь уже не подойдет, но при помощи составления уравнения (как это сделано в авторском решении), задача решается не так уж и сложно.

Задача №8 (2 балла)

Из А в В и из В в А выехали одновременно два мотоциклиста. Они встретились через 3 ч. Первый мотоциклист прибыл в В на 1 ч 6 мин позже, чем второй в А. Во сколько раз скорость второго мотоциклиста больше скорости первого?

А. В 1,5 раза. Б. В 1,3 раза. В. В 1,2 раза. Г. В 1,15 раза.

Решение

Обозначим скорость первого мотоциклиста через v км/ч, а скорость второго — через w км/ч. Первый мотоциклист до встречи проехал $3v$ км, а второй — $3w$ км. Первый мотоциклист после встречи проехал $3w$ км, следовательно, он затратил после встречи на путь в В $\frac{3w}{v}$ ч. Аналогично, второй мотоциклист после встречи проехал $3v$ км, следовательно, он затратил после встречи на путь в А $\frac{3v}{w}$ ч. Имеем уравнение: $\frac{3w}{v} - \frac{3v}{w} = 1,1$. Обозначив $\frac{w}{v}$ через y, получим уравнение $3y - \frac{3}{y} = 1,1$ или $30y^2 - 11y - 30 = 0$. отсюда y = 1,2. Следовательно, скорость второго мотоциклиста больше скорости первого в 1,2 раза.

Ответ: В 1,2 раза.

Комментарий:

В этой задаче 62% участников выбрали правильный ответ. Весь блок задач с пятой по восьмую требует только знание формулы S = v*t, сумев правильно ее применить, можно получить несложное уравнение, решение которого будет ответом на вопрос задачи.

Задача №9 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что он все фотографии правильно вложит в паспорта?

А. $\frac{3}{8}$. Б. $\frac{1}{4}$. В. $\frac{1}{8}$. Г. $\frac{1}{24}$.

Решение

Вероятность $P(A)$ события A равна отношению количества m исходов, при которых наступает событие A, к числу n всех равновозможных исходов опыта: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Обозначим паспорта числами 1, 2, 3, 4, а предназначенные им фотографии — соответственно буквами а, б, в, г. Тогда все вложения будут выглядеть так:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1а	1а	1а	1а	1а	1а	1б	1б	1б	1б	1б	1б
2б	2б	2в	2в	2г	2г	2а	2а	2в	2в	2г	2г
3в	3г	3б	3г	3б	3в	3в	3г	3а	3г	3а	3в
4г	4в	4г	4б	4в	4б	4г	4в	4г	4а	4в	4а

13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
1в	1в	1в	1в	1в	1в	1г	1г	1г	1г	1г	1г
2б	2б	2а	2а	2г	2г	2а	2а	2в	2в	2б	2б
3а	3г	3б	3г	3а	3б	3б	3в	3а	3б	3а	3в
4г	4а	4г	4б	4б	4а	4в	4б	4б	4а	4в	4а

Каждый столбец из 4-х пар обозначений характеризует одно вложение. Всего 24 вложения, то есть n = 24. Поскольку только один набор 1а, 2б, 3в, 4г, удовлетворяет условию, то есть m = 1. Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{24}$.

Ответ: Г. $\frac{1}{24}$.

Комментарий:

Эту задачу решили 57% участников. Задачу можно было решить и перебором, но учитывая количество вариантов, это не самый легкий метод решения данной задачи.

Задача №10 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что ровно три фотографии будут правильно вложены в паспорта?

А. 0. Б. $\frac{1}{24}$. В. $\frac{1}{12}$. Г. $\frac{1}{8}$.

Решение

Если правильно вложено три фотографии, то правильно будет вложена и четвёртая. Следовательно, не существует вложений, в которых правильно вложены ровно три фотографии.

Ответ: А. 0.

Комментарий:

Только половина участников (50%) дали здесь верный ответ. Многие подумали, что количество исходов, когда только в одном паспорте неправильная фотография, можно посчитать как количество паспортов. Но они не учли, что такой вариант невозможен. В результате чего получили ответ Г. $\frac{1}{8}$.

Задача №11 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что ни одна фотография не будет правильно вложена в паспорт?

А. $\frac{1}{8}$. Б. $\frac{1}{4}$. В. $\frac{3}{8}$. Г. $\frac{3}{4}$.

Решение

Используем обозначения, вверенные в решении задачи 9. Обозначим через *B* событие: «Ни одна фотография не вложена правильно в паспорт». Подсчитаем количество исходов, благоприятствующих этому событию. Такие наборы следующие:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1б	1б	1б	1в	1в	1в	1г	1г	1г
2а	2в	2г	2а	2г	2г	2а	2в	2в
3г	3г	3а	3г	3б	3а	3б	3а	3б
4в	4а	4в	4б	4а	4б	4в	4б	4а

Всего 9 наборов, то есть m = 9. Следовательно, $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

Ответ: В. $\frac{3}{8}$.

Комментарий:

С этой задачей справились только 27% участников. Задачу можно было решить и без перебора вариантов. Воспользуемся обозначениями из авторского решения. Для фотографии а есть 3 варианта неправильного вложения в паспорт. Для каждого из этих вариантов есть 3 варианта неправильного вложения фотографии, в чьем паспорте лежит фотография а. Остальные две фотографии можно положить в паспорта неправильно только одним способом (можете убедиться в этом на примере самостоятельно). Таким образом, количество вариантов неправильного вложения всех четырех фотографий будет 9. Тогда вероятность данного события будет равна 9/24 или 3/8.

Задача №12 (2 балла)

Имеется 4 фотографии неизвестных людей и 4 их паспорта, но без фотографий. Фотографии рассеянный служащий наугад вкладывает в паспорта. Какова вероятность того, что ровно две фотографии будут правильно вложены в паспорта?

А. $\frac{1}{8}$. Б. $\frac{1}{4}$. В. $\frac{3}{8}$. Г. $\frac{1}{2}$.

Решение

Используем обозначения, вверенные в решении задачи 9. Обозначим через *C* событие: «Ровно две фотографии правильно вложены в паспорта». Подсчитаем количество исходов опыта, благоприятствующих этому событию. Такие вложения следующие:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1а	1а	1а	1б	1в	1г
2б	2в	2г	2а	2б	2б
3г	3б	3в	3в	3а	3в
4в	4г	4б	4г	4г	4а

Всего 6 вложений, то есть $m = 6$. Следовательно, $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Ответ: Б. $\frac{1}{4}$.

Комментарий:

Эту задачу правильно решили 42% участников. Задачу также можно было решать и без перебора вариантов. Для того чтобы посчитать количество исходов, при которых ровно 2 фотографии вложены правильно, достаточно посчитать количество вариантов выбора двух паспортов их четырех. В этих двух паспортах и будут правильные фотографии. Для этого существует специальная формула $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где n! = 1*2*…*n. В данном случае n = 4, k = 2, тогда количество исходов, когда ровно два паспорта вложены правильно равно 6. А так как всевозможных вложений 24, то вероятность искомого события равно 24/6 = 1/4.

ЗНАНИКА