КАРТА СОКРОВИЩ

ВСЕРОССИЙСКИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОНКУРС

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор задач третьей части заданий

1 4-5 класс

<u>Задача №1.</u>

20 спичек разложили в 13 коробков и на каждом написали количество спичек в этом коробке. Может ли произведение этих чисел быть нечётным числом?

Решение 1:

От противного. Предположим, что произведение получилось нечетным числом. Значит, все множители были нечетными числами (так как при умножении на четное число произведение получается четное). Раз у нас было 13 множителей, то сумма 13 нечетных чисел должна быть нечетной, но по условию она равна 20. Получили противоречие. Следовательно, произведение этих чисел не может быть нечетным числом.

Решение 2:

Нам необходимо разложить 20 спичек в 13 коробков так, чтобы произведение чисел на коробках было нечетным числом. Умножение любого числа на 0 дает 0, значит, пустых коробков быть не может. Разложим по одной спичке в каждый из 13 коробков. Остается 7 спичек, которые надо разложить в 13 коробков. Чтобы произведение было нечетным, в каждом коробке должно быть нечетное количество спичек. Значит, добавлять в коробки можно либо 0, 2, 4 либо 6 спичек, так как по 1 спичке в коробках уже есть. Но число 7 нельзя разбить на сумму двоек, четверок и шестерок. Следовательно, невозможно сделать так, чтобы произведение чисел на коробках было нечетным.

<u>Комментарий</u>

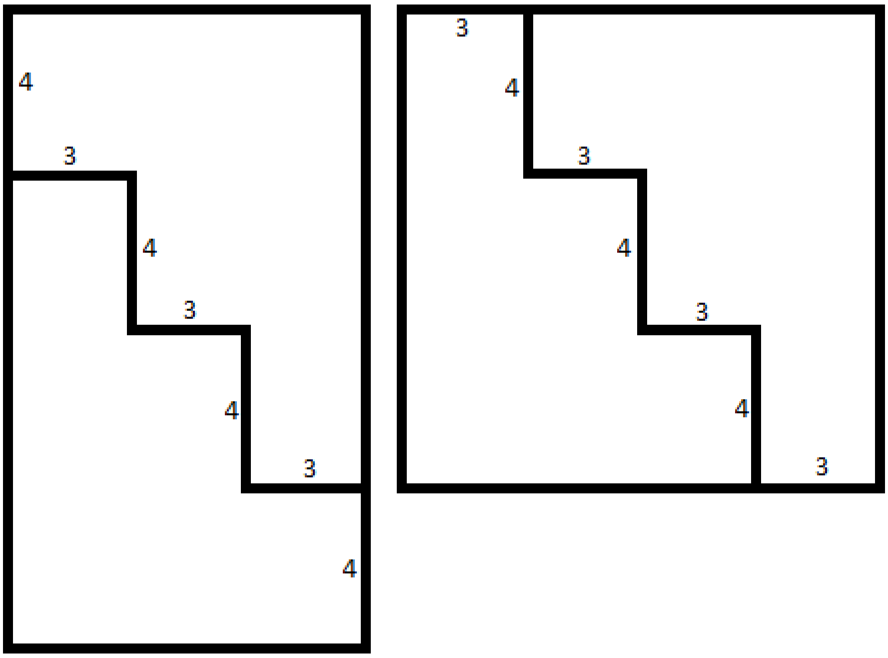
Многие участники конкурса решали данную задачу методом перебора. Конечно это можно сделать, но перебор получается достаточно громоздкий, и почти все упускали какие-либо возможные варианты. А если перебор не полный, то и задача решена не полностью.

Дорогие друзья, многие задачи решаются перебором, но довольно часто это далеко не самый легкий путь. Подумайте над задачей подольше, возможно вы сможете найти более простое решение. Но если все же приходится решать перебором, то будьте предельно внимательны, чтобы не упустить какие-либо варианты (потерянные варианты при переборе это потерянные баллы). Решая задачу перебором, ОБЯЗАТЕЛЬНО приводите в решении проделанный перебор. Помните, ответ подкрепленный словами «решил(а) перебором» ничего не стоит.

<u>Задача №2.</u>

Разрежьте прямоугольник 9×16 на две части так, чтобы из полученных частей можно было сложить квадрат (нарисуйте, как надо резать и как складывать).

Пример:



<u>Комментарий</u>

Думаю, только примера как это сделать, вам будет мало. Какие методы могут помочь догадаться до такого примера? Для начала можно заметить, что площадь данного прямоугольника 9x16 равна 144, а так как в итоге мы должны получить квадрат то его сторона должна равняться 12 (ведь 12x12=144). Сделаем надрезы на нашем прямоугольнике, так чтобы его стороны были не больше 12 (рис. 1).

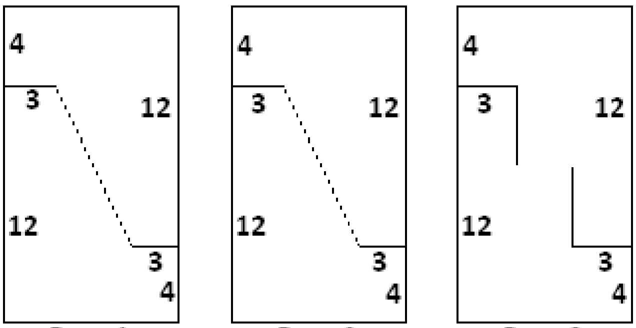


Рис. 1 **Рис. 2** **Рис. 3**

Далее на месте пунктирной линии будет какой-то разрез, который позволит нам соединить 2 части прямоугольника 9x16 в квадрат 12x12. Заметим, что вторая сторона прямоугольника равна 9, поэтому туда надо будет добавить еще 3, чтобы получить сторону искомого квадрата. Исходя из этого соображения, сделаем наши разрезы длинной 3 (рис 2). Далее становится понятно, как наши части прямоугольника будут складываться (нижняя часть влево на 3 и вверх на 4). Осталось только заменить пунктирную линию так, чтобы части ровно состыковались. Чтобы наши части встали ровно друг к другу, необходимо сделать разрезы, показанные на рисунке 3. И остается очевидный последний штрих.

Чаще всего люди, не справившиеся с заданием, попросту не поняли, что именно нужно сделать. Может быть, отчасти это и наша ошибка в том, что не было уточнения того, что складывать надо без наложения. Ведь некоторые участники посчитали, что достаточно загнуть у прямоугольника полоску 7x9 так чтобы остался квадрат 9x9. Естественно это не является правильным решением.

Многие из вас, участников конкурса, проигнорировали условие «нарисуйте, как надо резать и как складывать», настоятельно рекомендую не допускать подобного.

Задача №3.

На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Ваня и Петя по очереди вычёркивают эти числа (Ваня ходит первым). Петя хочет, чтобы после его 49-го хода на доске осталось два соседних числа. Всегда ли он сможет это сделать?

Решение 1:

После 49-го хода Пети на доске останется два числа, задача Пети сделать так чтобы это были соседние числа. Если Петя разобьет написанные на доске числа 1, 2, …,100 на пары (1, 2), (3,4), …, (99, 100) и после хода Вани будет вычеркивать число из той же пары, что и вычеркнул Ваня, то после 49-го хода Пети на доске будет вычеркнуто 49 пар чисел. Значит, останется одна пара.

Ответ: Ваня всегда сможет сделать так, чтобы после его 49-го хода на доске осталось два соседних числа.

Решение 2:

В начале «игры» на доске написана одна непрерывная последовательность чисел, содержащая четное количество элементов. После первого хода Вани на доске появляется ровно одна непрерывная последовательность чисел с нечетным количеством элементов. Если Ваня вычеркнул крайнее число последовательности, то есть 1 либо 100, то осталась последовательность чисел из 99 элементов, если же Ваня вычеркнул число отличное от 1 и 100, то на доске останется одна непрерывная последовательность с четным количеством элементов и одна с нечетным. Петя в свой ход может вычеркнуть крайнее число последовательности с нечетным количеством элементов, тем самым сделав из нее последовательность с четным количеством элементов (или зачеркнув ее полностью, если последовательность состояла из одного числа). Так или иначе, на доске после хода Пети не останется непрерывной последовательностей с нечетным количеством элементов. Далее Ваня своим ходом опять вычеркивает число из последовательности с четным количеством чисел, создав тем самым одну непрерывную последовательность с нечетным количеством чисел. Петя повторяет проделанный ранее «трюк» с превращением ее в последовательность с четным количеством чисел (либо ее удалением). Получается, что после каждого хода Пети на доске не может остаться ни одной последовательности чисел с нечетным количеством элементов. Таким образом, после 49-го хода Пети, оставшиеся два числа будут составлять непрерывную последовательность с четным количеством элементов, то есть это будут соседние числа.

Ответ: Ваня всегда сможет сделать так, чтобы после его 49-го хода на доске осталось два соседних числа.

Комментарий

Наиболее распространенные ошибки участников состояли в том, что они не понимали вопрос задачи «Всегда ли он сможет это сделать?» и приводили простой пример как такое может получиться. Например: они зачеркивают числа по порядку и после 49-го хода Пети остаются числа 99 и 100, или, зачеркивая в обратном порядке, оставляют числа 1 и 2. Вопрос «Всегда ли он сможет это сделать?» подразумевает, что при любых ли действиях оппонента он сможет это сделать.

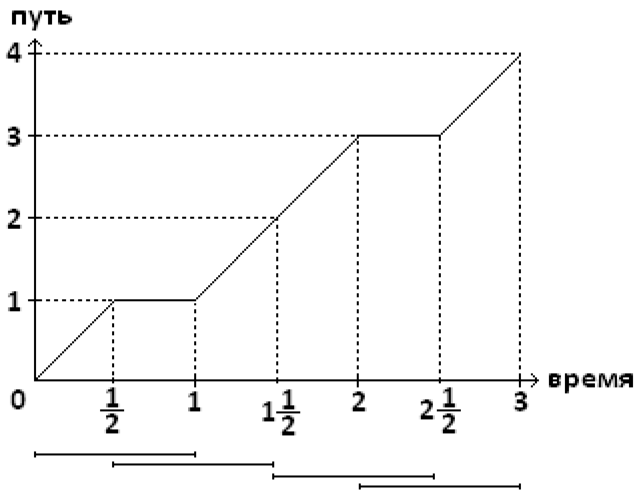
Дорогие участники конкурсов, не стесняйтесь задавать вопросы по условиям задач, если вам что-то не понятно. Методисты еФТШ всегда готовы оказать вам необходимую помощь.

Задача №4.

4 человека в течение 3 часов наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 час и заметил, что за этот час улитка проползла ровно 1 метр. В течение этих трёх часов улитку ни на миг не оставляли без присмотра. Могла ли улитка за эти 3 часа проползти 4 метра?

Решение:

4 человека наблюдали за улиткой в течение 3 часов. Каждый наблюдал ровно 1 час. Значит, есть промежутки времени, когда за улиткой наблюдало более одного человека, и есть промежутки времени, когда за улиткой наблюдал только 1 человек. Попробуем распределить время наблюдения за улиткой так, чтобы у каждого человека был такой промежуток времени, когда он наблюдал за улиткой один. Пусть в те промежутки времени, когда за улиткой наблюдал только 1 человек, она проползала по 1 метру, а в остальное время стояла на месте. Если у каждого человека, в его часе наблюдения, по одному промежутку времени, когда кроме него за улиткой никто не наблюдал (за который улитка проползала 1 метр), то каждый человек заметил, что за час наблюдения улитка проползла 1 метр. Но так как 4 человека наблюдали за улиткой, то будет 4 промежутка времени, когда улитка проползала по 1 метру и в сумме улитка проползет 4 метра. На рисунке приведен пример такого наблюдения:



На графике показано как изменялся пройденный улиткой путь с течением времени. Под графиком, отрезками показано время наблюдения людей. Как видим, каждый наблюдал за улиткой ровно 1 час и за этот час заметил, что улитка проползла ровно 1 метр. Улитку ни на миг не оставляли без присмотра и она за 3 часа проползла 4 метра.

Комментарий

Наиболее распространенные ошибки в этой задаче заключались в том, что участники конкурса считали, что улитка должна ползти с постоянной скоростью.

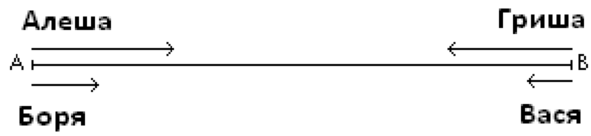
Считали, что за 3 часа улитка проползет только 3 метра (ведь она проползает 1 метр за 1 час). Но в условии ничего не сказано о характере передвижения улитки, поэтому такое предположение ошибочно. Также, некоторые участники конкурса писали в решении, что каждый видел, как улитка проползла 1 метр, человека 4, получается, улитка проползла 4 метра. Надо понимать, что раз 4 человека наблюдали по 1 часу в течение 3 часов, то будет такое время, когда за улиткой наблюдали 2, 3, или даже все 4 человека. Если улитка в это время ползла, то пройденный улиткой путь не будет равняться сумме путей пройденных улиткой во время наблюдения каждым человеком. Так как в этой сумме, один и тот же пройденный отрезок будет посчитан несколько раз (когда улитка ползла под наблюдением нескольких человек).

Уважаемые участники, не придумывайте дополнительные условия к задачам, от этого вы можете получить неправильные ответы, или упустить правильные!

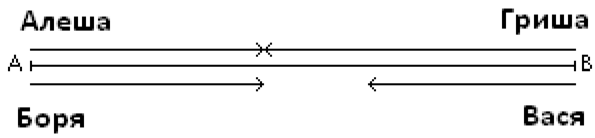
<u>Задача №5.</u>

Алёша и Боря выходят из пункта А, а навстречу им из пункта В выходят Вася и Гриша. Алёша идет в два раза быстрее Бори, а Гриша – в три раза быстрее Васи. Какая встреча произойдёт ближе к пункту А – Алёши и Гриши или Бори и Васи?

Решение 1:

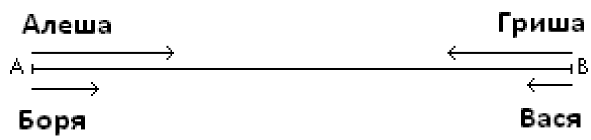


Если увеличить скорость Бори и Васи в два раза, то место их встречи останется неизменным. Изменится лишь то, что до места встречи они дойдут в два раза быстрее. После увеличения их скоростей, скорость Бори станет такой же, как скорость Алеши, так как скорость у Алеши изначально была в два раза больше чем у Бори. Гриша по-прежнему будет идти быстрее, чем Вася, так как скорость Гриши изначально была в три раза больше чем скорость Васи. В момент встречи Алеши и Гриши, Боря пройдет такое же расстояние от пункта А как и Алеша. В то время как Вася пройдет меньшее расстояние от пункта В чем Гриша. Получается, что Боря и Вася еще не дошли до места их встречи.

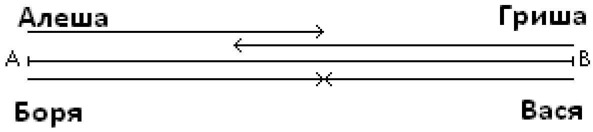


Следовательно Боря пойдет большее расстояние до встречи с Васей чем Алеша до встречи с Гришей, а значит встреча Алеши и Гриши произойдет ближе к пункту А чем встреча Бори и Васи.

Решение 2:



Если увеличить скорость Бори и Васи в два раза, то место их встречи останется неизменным. Изменится лишь то, что до места встречи они дойдут в два раза быстрее. После увеличения их скоростей, скорость Бори станет такой же, как скорость Алеши, так как скорость у Алеши изначально была в два раза больше чем у Бори. Гриша по-прежнему будет идти быстрее, чем Вася, так как скорость Гриши изначально была в три раза больше чем скорость Васи. Рассмотрим момент встречи Бори и Васи.



Скорость Алеши такая же, как и скорость Бори, значит, они пройдут одинаковое расстояние от пункта А. Скорость Гриши больше чем скорость Васи, значит, Гриша пройдет большее расстояние от пункта В, чем Вася. Получается, что Алеша и Гриша уже прошли место их встречи, значит, до встречи с Гришей Алеша прошел меньшее расстояние, чем Боря до встречи с Васей. Получаем, что встреча Алеши и Гриши состоялась ближе к пункту А, чем встреча Бори и Васи.

Решение 3:

Пусть Алеша и Гриша встретились через время t. Так как Алеша идет в два раза быстрее Бори, то через время 2t Боря пройдет такое же расстояние от пункта А как и Алеша за время t. Но так как Гриша в три раза быстрее Васи, то Вася за время 2t пройдет меньше чем Гриша за время t. Получаем, что в сумме Боря и Вася за время 2t прошли меньше чем Алеша и Гриша за время t. Значит, Боря и Вася за время 2t не дойдут до места их встречи. Получаем, что до встречи с Васей Боря должен пройти еще какое-то расстояние. Следовательно, до встречи с Васей Боря пройдет больше чем Алеша до встречи с Гришей. То есть встреча Алеши и Гриши произойдет ближе к пункту А чем встреча Бори и Васи.

<u>Комментарий</u>

Очень распространенная ошибка была в том, что участники конкурса считали все на конкретных числах, но не объясняли, почему при других числах ответ останется неизменным. Например: брали расстояние от А до В равное 5000 метров, скорость Алеши 1000 м/ч, скорость Бори 500 м/ч, скорость Гриши 1500 м/ч, скорость Васи 500 м/ч (при таких данных Алеша и Гриша встретятся через 2 часа на расстоянии 2000 м от пункта А, Боря и Вася встретятся через 5 часов на расстоянии 2500 м от пункта В).

Также, многие участники рассматривали скорости Алеши и Гриши равными между собой, не объясняя, почему данное предположение не влияет на ответ задачи.

В общем, ДОРОГИЕ УЧАСТНИКИ, будьте внимательны при решении задач, рассматривая частный случай, не забывайте доказывать то, что в других случаях ответ останется аналогичным!

2 6-7 класс

Задача №1.

Всегда ли можно к заданному натуральному числу приписать по одной цифре в начале и в конце так, чтобы получившееся число делилось на 15?

Решение:

Чтобы число делилось на 15 надо, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Припишем в конце 0 либо 5, тогда число будет делиться на 5. Найдем сумму цифр числа и допишем вначале 1, 2 либо 3 так, чтобы сумма дописанной цифры и суммы цифр числа делилась на 3. Тогда число будет делиться на 3 и на 5, а значит и на 15.

Комментарий

Многие участники почему-то считают, что в задачах с вопросом «всегда ли…» достаточно ответить «да» либо «нет». А как же обоснование? Не забывайте обосновывать свои ответы, и старайтесь делать это как можно более детально. За простой ответ «да» либо «нет» вы не получите более чем один балл.

Задача №2.

На прямой отмечены точки A, B, C, D, причем AB=9, BC=3, CD=2. Чему может быть равно расстояние между серединами отрезков AB и CD? Укажите все варианты и объясните, почему нет других.

Решение:

Рассмотрим луч AB и возможные расположения точек: ADCB, ACDB, ABDC, ABCD. Возьмем точку A за начало координат, то есть 0. Тогда точка B имеет координату 9, а середина отрезка AB - 4,5. Середины отрезков CD при вышеуказанных расположениях точек имеют координаты 4, 7, 11, 13 соответственно. Значит, расстояние между серединами отрезков AB и CD может равняться 0,5, 2,5, 6,5, 8,5.

Комментарий

Типичной ошибкой у участников конкурса в данной задаче было то, что найдя один ответ, они заканчивали решение задачи. А ведь в условии задачи не просто так написано «Укажите все варианты и объясните, почему нет других».

Дорогие друзья, когда требуется найти все ответы и объяснить, почему других нет, скорее всего, правильный ответ не один. Не бросайте решение задачи после нахождения одного правильного ответа. И даже если другие ответы не удовлетворяют условию задачи, то это еще доказать нужно!

Задача №3.

Имеется 101 пуговица одного из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов.

Решение:

Предположим, что среди них не найдутся ни 11 пуговиц одного цвета, ни 11 пуговиц разных цветов. Тогда среди всех пуговиц будет представлено не более 10 цветов, и каждого цвета будет не более 10 пуговиц. Но тогда пуговиц будет не более чем 10*10=100. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно и среди пуговиц найдутся либо 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов.

<u>Комментарий</u>

Очень распространенной ошибкой в этой задаче было то, что участники посчитали что «Имеется 101 пуговица одного из 11 цветов» значит, что все 101 пуговица одного цвета. И доказывать наличие 11 пуговиц одного цвета среди 101 пуговицы одного цвета не имеет смысла. Не кажется ли вам такая интерпретация условия абсурдной? Если у вас возникает подобная ситуация, не стесняйтесь уточнить условие задачи, написав на почту, указанную на сайте школы. Мы с радостью ответим на все ваши вопросы.

<u>Задача №4.</u>

У пяти ребят вместе 60 леденцов. У Алеши леденцов не больше чем у Бори, у Бори — не больше чем у Васи, у Васи — не больше чем у Гриши, у Гриши — не больше чем у Димы. Какое самое меньшее количество леденцов может быть у Алеши и Димы вместе? Не забудьте обосновать ответ.

Решение:

Предположим, что у Алеши и Димы вместе не более 14 леденцов. Тогда у Димы также не более 14 леденцов. Но в таком случае у Бори, Васи и Гриши тоже не более чем по 14 леденцов. Тогда общее количество леденцов не более чем 14*4=56. Противоречие. Пример, когда у Алеши и Димы вместе 15 леденцов: У Алеши 0, у всех остальных по 15.

<u>Комментарий</u>

В этой задаче участники конкурса приводили множество различных ответов, допуская различные ошибки. Во-первых, многие почему-то посчитали, что у Димы не может быть 0 леденцов. Но ведь если у вас есть 10 леденцов, а у меня нет ни одного, то у нас вместе будет 10 леденцов? Это же не противоречит условию? Во-вторых, некоторые участники видимо не знали разницы между «не больше» и «меньше». Объясняю, «не больше» включает в себя тот случай, когда поровну, в то время как «меньше» значит, что поровну быть не может. В-третьих, некоторые не сочли нужным обосновать свой ответ.

Всегда обосновывайте свои ответы, где это требуется. Без обоснования вы не получите даже и половины максимального балла за задачу.

<u>Задача №5.</u>

Имеется 6 различных (однако внешне неразличимых) гирек, веса которых 1 г, 2 г, …, 6 г. На них сделаны наклейки «1 г», «2 г», …, «6 г». Как с помощью всего двух взвешиваний на рычажных весах убедиться, что все наклейки – правильные?

Решение:

Проверяем верно ли, что гирьки с наклейками «1 г», «2 г» и «3 г» в сумме весят столько же, сколько гиря с наклейкой «6 г». Если да, то гиря с наклейкой «6 г» действительно весит 6 г, а гири с наклейками «1 г», «2 г» и «3 г» действительно содержат гири с весами 1 г, 2 г и 3 г. Делаем вывод, что гири с наклейками «4 г» и «5 г» содержат гири с весами 4 г и 5 г. Вторым взвешиванием проверяем, что гири с наклейками 3 г и 5 г весят в сумме больше, чем гири с наклейками 1 г и 6 г. Если это так, то это однозначно определяет гири с наклейками «3 г» и «5 г», поскольку их максимальная сумма не может превышать 8, а минимальная сумма гирек с наклейками «1 г» и «6 г» не меньше 7 г. Также это взвешивание однозначно определяет и гирю с наклейкой «1 г». Далее определяются гири с наклейками «2 г» и «4 г», так как мы уже установили все остальные.

Комментарий

С этой задачей справились далеко не все. Действительно, она не простая. Многие привадили два взвешивания, но не объясняли, почему после таких взвешивания мы сможем установить веса всех гирь. И при проверке решений оказывалось, что такие взвешивания не подходят. Такое случалось по разным причинам. Приведу пару примеров неправильных решений и объясню где в них ошибка.

Пример 1:

При первом взвешивании положим на левую чашу весов гири с наклейками «4 г» и «5 г», а на правую – «3 г» и «6 г». При втором взвешивании сравним гири с наклейками «3 г» и «1 г» с гирей «4 г».

Итак, что мы узнаем после таких взвешиваний? При первом взвешивании мы поделили наши шесть гирек на 3 группы по две гири. Это гири на левой чаше, гири на правой чаше и гири, не участвовавшие во взвешивании. Даже если гири с наклейками «3 г» и «6 г» это действительно гири с весами 3 г и 6 г, то мы не знаем какая из них весит 3 г, а какая 6 г. Аналогично и в остальных группах. Поэтому когда мы берем гирю с наклейкой «4 г» при втором взвешивании, мы не знаем, весит она 4 г или же 5 г. И даже если гиря с наклейкой «3 г» действительно весит 3 г, то гиря с наклейкой «1 г» может оказаться гирей с весом 2 г. В таком случае, при втором взвешивании «3 г» + «1 г» = «4 г», в действительности может оказаться 3 г + 2 г = 5 г. Значит, после таких взвешиваний мы не сможем установить правильные ли наклейки на всех гирях.

Пример 2:

Первое взвешивание: «1 г» + «2 г» + «6 г» = «5 г» + «4 г». Второе взвешивание: «1 г» + «5 г» = «6 г».

Построить пример как могут быть перепутаны наклейки, чтобы равновесия сохранились, в этом случае не так просто как предыдущем примере, но все же можно (в качестве тренировки попробуйте сделать это сами). Как же построить такой пример? Для начала сделаем несколько замечаний. В данном примере, в первом взвешивании весы должны находиться в равновесии, значит, суммарный вес всех пяти гирь на весах равен четному числу. Так как общий вес всех шести имеющихся гирь равен 21 г, то гиря, не участвовавшая в первом взвешивании должна весить нечетное количество грамм. Значит, она может весить 1 г, 3 г или 5 г. И при каждом варианте оставшиеся пять гирь можно разместить на чашах весов так, чтобы вес трех гирь был равен весу еще двух (можете сами в этом легко убедиться). Предположим что гиря с наклейкой «3 г» весит 5 г. Тогда в первом взвешивании на левой чаше весов будут лежать гири с весами 1 г, 3 г и 4 г, а на правой – 2 г и 6 г. Назовем гири с левой чаши – первой группой, а гири с правой чаши – второй. Во втором взвешивании, на левой чаше лежит по одной гири из каждой из двух групп, а на правой чаше – гиря из первой группы. Путем несложного перебора замечаем, что нам подходят гири с весами 1 г и 2 г на левую чащу и 3 г на правую. Таким образом получаем, что если гири с наклейками «1 г», «2 г», «3 г», «4 г», «5 г» и «6 г» на самом деле весят 1 г, 4 г, 5 г, 6 г, 2 г и 3 г соответственно, то наши два взвешивания покажут равновесия. То есть такие взвешивания не позволяют установить правильно ли расположены все наклейки.

Дорогие друзья, часто ответы в подобных задачах получаются путем простого подбора. После получения ответа постарайтесь построить контрпример к своему ответу. Если ваш ответ вдруг оказался неправильным, возможно вы сможете это обнаружить и найти новый.

3 8-9 класс

<u>Задача №1.</u>

На прямой отмечено пять различных точек. Середины всевозможных отрезков с концами в отмеченных точках окрашены в красный цвет. Каким может быть наименьшее число красных точек?

Решение:

Можно считать, что крайними точками являются числа 0 и 1 на числовой прямой, остальные три точки соответствуют числам a, b и c таким, что $0<a<b<c<1$. Числа $a/2$, $b/2$, $c/2$, $1/2$, $(a+1)/2$, $(b+1)/2$ и $(c+1)/2$ попарно различные и соответствуют серединам отрезков. Таким образом, получается, что красных точек не меньше семи. Остается только построить пример, в котором красных точек будет ровно 7. Отметим точки 0, 1/4, 1/2, 3/4 и 1. Различных середин отрезков с концами в этих точках будет ровно 7.

<u>Комментарий</u>

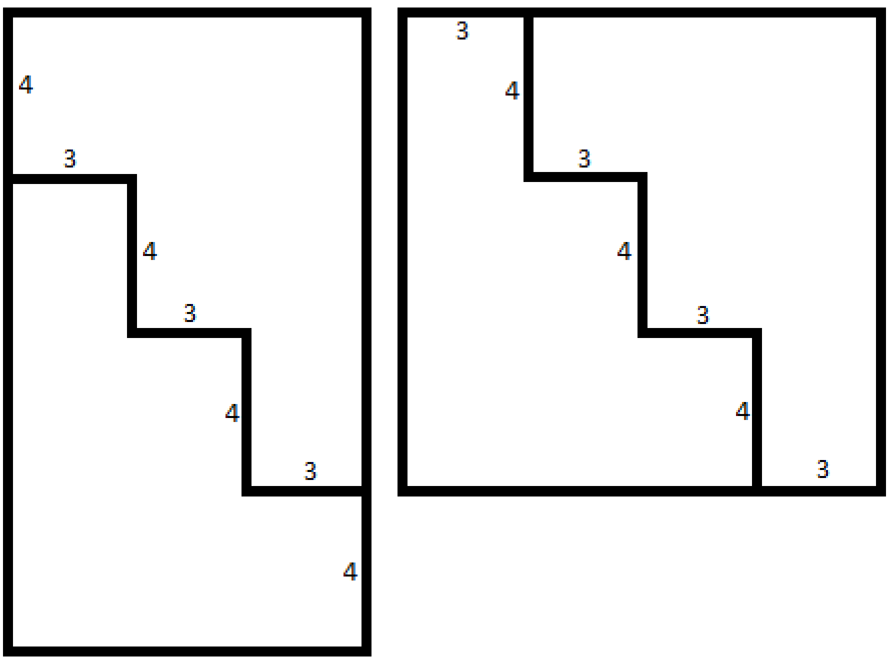
Многие участники, в этой задаче дали ответ, привели пример, но не доказали, что приведенный ими ответ является наименьшим. Так как это неотъемлемая часть решения задачи, они потеряли здесь большое количество баллов.

Уважаемые участники конкурсов, когда в задаче требуется найти наименьший (наибольший) ответ, то просто дать ответ это лишь малая часть решения. Основная часть решения как раз и состоит в том чтобы доказать что ответ минимален (максимален). Не забывайте об этом.

<u>Задача №2.</u>

Разрежьте прямоугольник 9×16 на две части так, чтобы из полученных частей можно было сложить квадрат (нарисуйте, как надо резать и как складывать).

Пример:



<u>Комментарий</u>

Думаю, только примера как это сделать, вам будет мало. Какие методы могут помочь догадаться до такого примера? Для начала можно заметить, что площадь данного прямоугольника 9x16 равна 144, а так как в итоге мы должны получить квадрат то его сторона должна равняться 12 (ведь 12x12=144). Сделаем надрезы на нашем прямоугольнике, так чтобы его стороны были не больше 12 (рис. 1).

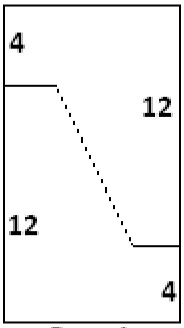


Рис. 1

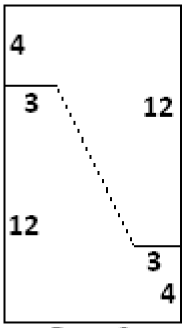


Рис. 2

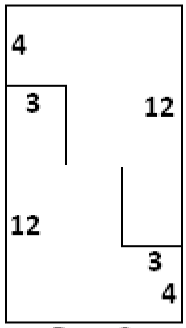


Рис. 3

Далее на месте пунктирной линии будет какой-то разрез, который позволит нам соединить 2 части прямоугольника 9x16 в квадрат 12x12. Заметим, что вторая сторона прямоугольника равна 9, поэтому туда надо будет добавить еще 3, чтобы получить сторону искомого квадрата. Исходя из этого соображения, сделаем наши разрезы длинной 3 (рис 2). Далее становится понятно, как наши части прямоугольника будут складываться (нижняя часть влево на 3 и вверх на 4). Осталось только заменить пунктирную линию так, чтобы части ровно состыковались. Чтобы наши части встали ровно друг к другу, необходимо сделать разрезы, показанные на рисунке 3. И остается очевидный последний штрих.

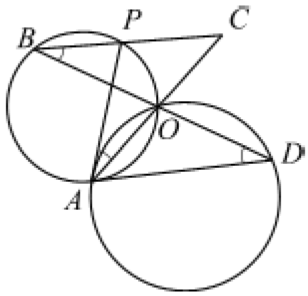
Чаще всего люди, не справившиеся с заданием, попросту не поняли, что именно нужно сделать. Может быть, отчасти это и наша ошибка в том, что не было уточнения того, что складывать надо без наложения. Ведь некоторые участники посчитали, что достаточно загнуть у прямоугольника полоску 7x9 так чтобы остался квадрат 9x9. Естественно это не является правильным решением.

Многие из вас, участников конкурса, проигнорировали условие «нарисуйте, как надо резать и как складывать», настоятельно рекомендую не допускать подобного.

<u>Задача №3.</u>

Пусть *O* – точка пересечения диагоналей параллелограмма *ABCD*, *P* – вторая точка пересечения окружности, проходящей через *A, O, B* с прямой *BC*. Докажите, что прямая *AP* касается окружности, проходящей через точки *A, O, D*.

Решение:



ABCD – параллелограмм, значит, угол CBO равен углу ODA. Так как P – вторая точка пересечения BC с окружностью, проходящей через B, O и A, то углы PBO и PAO равны (как опирающиеся на одну дугу окружности). Поскольку получили, что угол PAO равен углу ODA, AP – касательная (по обратной теореме об угле между касательной и хордой).

Комментарий

С предложенной геометрией справились далеко не все. Ошибка многих состояла в том, что они утверждали различные факты (не пытаясь их обосновать), которые на самом деле не являются верными. Во многом этому способствовал неправильный рисунок к задаче.

Дорогие друзья, если вы не слишком сильны в геометрии, постарайтесь как можно аккуратней сделать рисунок к задаче. Это часто поможет вам избежать подобных ошибок. Также, на правильно выполненном рисунке, вы сможете увидеть различные равенства, подобия, пересечения прямых и многое другое, что поможет вам при решении поставленной задачи.

Задача №4.

В каждой клетке таблицы 2013×2013 стоит число «+1» или «-1». Докажите, что сумма произведений по всем строкам и всем столбцам таблицы не может быть равна нулю.

Решение:

Заметим, что произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно либо 1, либо -1. Предположим, что сумма произведений по всем строкам и всем столбцам таблицы оказалась равной 0. Это значит, что число произведений равных 1, оказалось равным числу произведений равных -1, то есть их по 2013. Но если перемножить все эти произведения, то должно получиться 1, так как это будет равно произведению квадратов всех чисел таблицы. Получили противоречие.

Комментарий

С этой задачей справились далеко не все. Действительно, решение хоть и не сложное, но догадаться до него не так уж и просто. Ошибкой многих было то, что они опять же основывали свое решение на неверных фактах.

Друзья, когда вы утверждаете в своем решении тот или иной факт, обязательно доказывайте его истинность. Если вы всегда будете это делать, то вы сможете избежать глупых ошибок. Вы не будете делать выводы исходя из ложных фактов, так как вы заметите свою ошибку при попытке доказательства верности используемых утверждений. И даже если ваши предположения оказываются верны, то без их доказательства ваше решение не будет полным, и вы можете потерять драгоценные баллы.

Задача №5.

Отрезок длиной 1000 полностью накрыт отрезками длиной 10. Найти наибольшее возможное количество отрезков длины 10, если известно, что после удаления любого из этих отрезков отрезок длины 1000 не будет накрыт полностью.

Решение:

Занумеруем отрезки длины 10 натуральными числами в порядке следования. Если отрезки с номерами n и n+2 пересекаются, то отрезок с номером n+1 можно удалить. Следовательно, отрезки с различными номерами одинаковой четности не пересекаются. На отрезке длинны 1000, нельзя расположить более 99 непересекающихся отрезков длины 10. Значит среди искомого количества отрезков длины 10, будет не более 99 отрезков с четными номерами и не более 99 отрезков с нечетными номерами. То есть всего будет не более 198 отрезков. Осталось показать, что можно расположить 198 отрезков согласно условию. Расположим 198 отрезков так, чтобы их центры образовывали арифметическую прогрессию, первый член которой равен 5. А последний 995. Между отрезками с номерами n и n+1 останется зазор, который накрывается только отрезком с номером n+1. Поэтому никакой из 198 отрезков нельзя удалить.

Комментарий

В этой задаче многие дали правильный ответ, но мало кто из них привел подробное доказательство, большинство все же ограничилось одним только ответом. Да и среди тех, кто привел подробное доказательство, не многие смогли сделать его достаточно строгим и понятным.

Уважаемые участники, умение правильно сформулировать свои мысли на бумаге довольно полезный навык, не только при оформлении решений. Письменные конкурсы отличный способ развития подобных навыков. Старайтесь излагать свои решения грамотно, чтобы они были достаточно строгими. При необходимости вводите свою терминологию, это может оказать отличную помощь в изложении некоторых моментов доказательств.