

Потомки Пифагора

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНКУРС



ЗНАНИКА

Электронная школа

[www.znanika.ru](http://www.znanika.ru)

## Разбор задач творческой части заданий

### 4-5 классы

#### Задача №10 (1 вариант)

Как, имея пятилитровую банку и девятилитровое ведро, набрать из реки ровно три литра воды, если никакими другими емкостями пользоваться нельзя?

**Решение:**

Заполним таблицу переливаний, в первой строке будет количество литров в пятилитровой банке, а во второй в девятилитровом ведре. Покажем, как отмерить 3 литра воды.

0	0	5	0	4	4	5	0	5
0	9	4	4	0	9	8	8	3

Так мы получили 3 литра воды в девятилитровом ведре. Обратите внимание, что в этой задаче есть и другие способы, достаточно привести любой из них.

#### Задача №10 (2 вариант)

Как, имея пятилитровую банку и девятилитровое ведро, набрать из реки ровно два литра воды, если никакими другими емкостями пользоваться нельзя?

**Решение:**

Заполним таблицу переливаний, в первой строке будет количество литров в пятилитровой банке, а во второй в девятилитровом ведре. Покажем, как отмерить 2 литра воды.

0	5	0	5	1	1	0	5	0	5	2
0	0	5	5	9	0	1	1	6	6	9

Так мы получили 2 литра воды в пятилитровой банке. Обратите внимание, что в этой задаче есть и другие способы, достаточно привести любой из них.

**Комментарий:**

Подобные задачи с переливаниями не редкость на математических олимпиадах. И как вы уже могли заметить из авторских решений, есть один простой способ решения подобных задач при наличии всего двух емкостей. Необходимо просто одним сосудом заполнить второй пока тот не наполнится, и выливать его, когда он будет полон. В итоге это приводит к тому, что рано или поздно вы получите в одном из сосудов необходимый объем, или придете к ситуации, которая уже встречалась в процессе переливаний, что будет означать, что процесс зациклился. Многие решения были основаны на том, что люди наливали половину емкости, треть емкости и т.д. Пытались отметить на сосудах тот или иной объем для его дальнейшего использования. Важно помнить, что в задачах подобного рода это не разрешено. Если дана емкость на X литров, то с ее помощью можно отмерить только X литров и никак не половину, треть и т.д.

### 6-7 классы

#### **Задача №10 (1 вариант)**

С числами можно выполнять следующие операции: умножать на два или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить ноль на первое место). Можно ли с помощью таких операций из 1 получить 74?

**Решение:**

Будем анализировать с конца. Число 74 можно получить, указанными операциями, из числа 37 (умножением на 2) или из числа 47 (перестановкой цифр). Числа 37 и 47 нечётные, поэтому умножением на 2 их получить нельзя. Перестановкой цифр 37 можно получить из числа 73, а 47 из 74 (начальное число). 73 — нечётное число, поэтому его также можно получить только перестановкой цифр из числа 37 (тоже уже встречалось). Получается, что 74 применением указанных операций можно получить только из чисел 37, 47 и 73. Таким образом, из 1 нельзя получить 74.

#### **Задача №10 (2 вариант)**

С числами можно выполнять следующие операции: умножать на два или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить ноль на первое место). Можно ли с помощью таких операций из 1 получить 78?

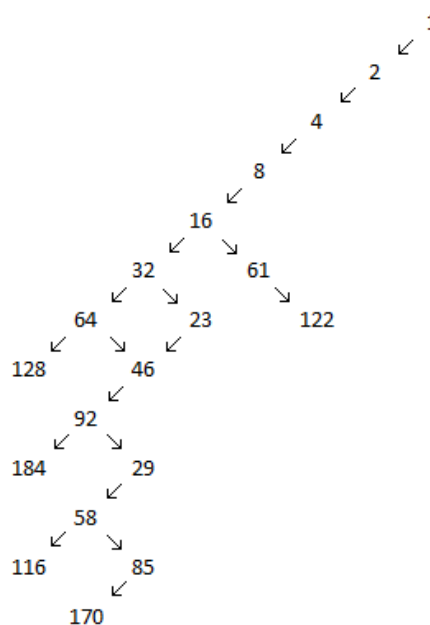
**Решение:**

Будем анализировать с конца. Число 78 можно получить, указанными операциями, из числа 39 (умножением на 2) или из числа 87 (перестановкой цифр). Числа 39 и 87 нечётные, поэтому умножением на 2 их получить нельзя. Перестановкой цифр 39 можно получить из числа 93, а 87 из 78 (начальное число). 93 — нечётное число, поэтому его также можно получить только перестановкой цифр из числа 39 (тоже уже встречалось). Получается, что 78 применением указанных операций можно получить только из чисел 39, 87 и 93. Таким образом, из 1 нельзя получить 78.

**Комментарий:**

Есть один простой способ решения данной задачи, который подходит к обоим вариантам. Можно просто найти все числа, которые можно получить из единицы, используя данный алгоритм. Их не так много, ведь ноль нельзя ставить на первое место. Поэтому, получив при умножении на 2 трехзначное число «ветка» на нем обрывается. Обнаружив все двухзначные числа, которые можно получить из единицы, просто заметим, что среди них нет ни 74, ни 78.

Большинство участников решивших эту задачу, решали именно таким способом.



## 8-9 классы

### Задача №10 (1 вариант)

В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: альфа, бета и гамма. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа альфа было 18 штук, типа бета - 23 штуки и типа гамма - 20 штук?

#### **Решение:**

Заметим, что после любого слияния четность количества амеб каждого типа меняется (так как оно либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1). Изначально было  $18 + 23 + 20 = 61$  амеба. За каждое слияние число амеб уменьшается на 1. Так как в конце осталась одна амеба, то слияний было 60. Если четное количество раз сменить четность количества амеб одного типа, то финальная четность не изменится. Изначально было нечетное число (23) амеб типа бета, значит и в конце их будет нечетное число – 1. Остальных типов амеб изначально было четное количество, и в конце их останется четное количество – 0.

### Задача №10 (6 балл)

У племени папуасов было 26 слитков золота, 22 редких жемчужин и 23 стеклянных бус. Они могут обменять у белых людей слиток золота и жемчужину на одни бусы, один слиток и одни бусы на одну жемчужину, либо одну жемчужину и одни бусы на один золотой слиток. После долгих обменов у папуасов осталось только одна вещь. Какая?

#### **Решение:**

Заметим, что после любого обмена четность количества любых предметов меняется (так как оно либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1). Изначально было  $26 + 22 + 23 = 71$  предмет. После каждого обмена число предметов уменьшается на 1. Так как в конце остался один предмет, то обменов было 70. Если четное количество раз сменить четность количества предметов одного типа, то финальная четность не изменится. Изначально было нечетное число (23) стеклянных бус, значит и в конце их будет нечетное число – 1. Остальных предметов изначально было четное количество, и в конце их останется четное количество – 0.

#### **Комментарий:**

С этой задачей справились далеко не все. Задача на инвариант и требует неочевидной идеи. Разберем подробно на примере задачи из первого варианта. Задача второго варианта имеет абсолютно идентичное решение. Большинство учеников привели алгоритм того, как остается амеба типа бета. Но подобное рассмотрение частного случая, не доказывает, что при использовании другого алгоритма ответ будет аналогичным.

Решения задачи были предложены разные, но так или иначе они были основаны на постоянности четности тех или иных амеб. Например, некоторые заметили, что сумма амеб альфа и гамма изначально четная, и при любом слиянии она остается четной. Из этого напрашивается простой вывод, что амеба альфа или амеба гамма не может остаться последней.



Электронная школа Знаника  
<http://znanika.ru>