



Потомки Пифагора

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНКУРС



ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор задач с открытым ответом

4-5 классы

Задача №6 (1 вариант)

Сумма двух чисел равна 396. Одно из них оканчивается нулём. Если 0 зачеркнуть, то получится второе число. Запиши, какие это числа.

Решение:

Если к числу приписать ноль, то получится число в 10 раз больше. То есть сумма этих двух чисел равна меньшему числу, умноженному на 11. Значит $396/11 = 36$ – это и есть меньшее число, а большее равно 360.

Ответ: 360 и 36.

Задача №6 (2 вариант)

Сумма двух чисел равна 275. Одно из них оканчивается нулём. Если 0 зачеркнуть, то получится второе число. Запиши, какие это числа.

Решение:

Если к числу приписать ноль, то получится число в 10 раз больше. То есть сумма этих двух чисел равна меньшему числу, умноженному на 11. Значит $275/11 = 25$ – это и есть меньшее число, а большее равно 250.

Ответ: 250 и 25.

Комментарий:

Среди задач второй части конкурса эта оказалась наиболее простой. С ней справилось больше всего участников. Разберем еще один способ решения данной задачи на примере задания из первого варианта.

Поскольку одно из двух чисел оканчивается нулем, а сумма их равна 396, то второе число оканчивается на 6. Так как второе число из первого получается зачеркиванием последней цифры (ноля), то первое число оканчивается на 60. Таким образом, мы имеем два числа $X60$ и $X6$, где X – некая цифра, сумма которых равна 396. Чтобы количество десятков в сумме чисел $X60$ и $X6$ равнялось 9, необходимо чтобы $X=9-6=3$. Значит искомые числа 360 и 36. Аналогичным образом решается задача второго варианта, в качестве упражнения попробуйте проделать это самостоятельно.

Задача №7 (1 вариант)

Ежик собирал в лесу грибы.

- Много ли ты уже собрал? Спросила белочка.

- Если я найду еще 2 гриба, то у меня будет столько же грибов, сколько в прошлом году. А если я найду не 2, а 26 грибов, то у меня их будет в 4 раза больше, чем в прошлом году.

Сколько грибов уже собрал ежик?

Решение:

Количество найденных ежиком грибов, да еще два – это количество собранных им грибов в прошлом году. Количество найденных ежиком грибов, да еще 26 – это учетверенное количество собранных им грибов в прошлом году. Значит $26-2=24$ – это утроенное количество найденных им в прошлом году грибов. Значит в прошлом году он собрал $24/3 = 8$ грибов, а сейчас пока на 2 меньше, то есть 6.

Ответ: 6.

Задача №7 (2 вариант)

Белочка собирала на зиму орехи.

- Много ли собрала? Спросил ёж.

- Если принесу еще 4 ореха, то у меня будет столько же орехов, сколько в прошлом году. А если найду не 4, а еще 28 орехов, то у меня будет в 3 раза больше, чем в прошлом году.

Сколько орехов уже собрала белочка?

Решение:

Количество найденных белочкой орехов, да еще 4 – это количество собранных ею орехов в прошлом году. Количество найденных белочкой орехов, да еще 28 – это утроенное количество собранных ею орехов в прошлом году. Значит $28-4=24$ – это удвоенное количество найденных ею в прошлом году орехов. Значит, в прошлом году она собрала $24/2=12$ орехов, а сейчас пока на 4 меньше, то есть 8.

Ответ: 8.

Комментарий:

Причиной наиболее распространенной ошибки в данной задаче была невнимательность участников. Ход их решения совпадал с авторским, но решение не было доведено до конца. Ученики находили количество грибов (орехов) собранное в прошлом году и записывали его в ответ.

Задача №8 (1 вариант)

Ребята повели лошадей на водопой. Сколько было ребят и сколько лошадей, если при подсчёте оказалось 25 голов и 80 ног?

Решение:

Так как голов всего 25, значит всего ребят и лошадей вместе тоже 25. Если бы у ребят не было ни одной лошади, то при 25 головах у них было бы 50 ног. Каждая лошадь имеет 2 дополнительных ноги по сравнению с ребенком. Значит, 30 дополнительных ног ($80-50$) получают за счет $30/2=15$ лошадей, а ребят, значит, $25-15=10$.

Ответ: 15 лошадей и 10 ребят.

Задача №8 (2 вариант)

Ребята повели лошадей на водопой. Сколько было ребят и сколько лошадей, если при подсчёте оказалось 30 голов и 100 ног?

Решение:

Так как голов всего 30, значит всего ребят и лошадей вместе тоже 30. Если бы у ребят не было ни одной лошади, то при 30 головах у них было бы 60 ног. Каждая лошадь имеет 2 дополнительных ноги по сравнению с ребенком. Значит, 40 дополнительных ног ($100-60$) получают за счет $40/2=20$ лошадей, а ребят, значит, $30-20=10$.

Ответ: 20 лошадей и 10 ребят.

Комментарий:

С этой задачей тоже справилось большинство участников конкурса. Многие, получив правильный ответ, перепутали количества лошадей и ребят. Подобной ошибки не произойдет, если вы будете проверять свои ответы. Если в задании оценивается только ответ (как в данном случае), то вдвойне неприятно решить задачу и получить за нее 0 баллов.

Наиболее простым способом решения данной задачи является составление системы уравнений, но немногие пока умеют это делать, так как во многих школах этому учат немного позднее. Разберем на примере задания из второго варианта:

Пусть x – количество лошадей, y – количество ребят. По условию $x+y=30$ и $4x+2y=100$. Из первого уравнения получаем, что $x=30-y$. Подставив во второе уравнение, получим:

$$4(30-y)+2y=100, \text{ раскроем скобки:}$$

$$120-2y=100,$$

$$2y=20,$$

$$y=10, \text{ теперь, подставив это в первое уравнение, получим:}$$

$x+10=30$, значит $x=20$. Итого 20 лошадей и 10 ребят. В качестве упражнения попробуйте решить задачу первого варианта аналогичным способом.

Задача №9 (1 вариант)

На карточках написаны числа 21, 16, 32, 9, 28, 4, 15. Какое наименьшее число можно получить, если выложить все карточки в ряд?

Решение:

Так как нужно использовать все карточки, то выкладывая их в ряд в числе всегда будет одинаковое количество цифр. Число тем меньше, чем меньше цифры, стоящие в первых разрядах.

Начнем конструировать наше число. С 1 начинаются карточки 15 и 16, так как 5 меньше 6, мы сначала выложим 15, а потом 16. Затем аналогично идет карточка 21, а за ней 28. Из оставшихся карточек наименьшая первая цифра у числа 32, остаются карточки 4 и 9. Получили число: 151621283249.

Ответ: 151621283249.

Задача №9 (2 вариант)

На карточках написаны числа 21, 16, 32, 9, 28, 4, 15. Какое наибольшее число можно получить, если выложить все карточки в ряд?

Решение:

Так как нужно использовать все карточки, то выкладывая их в ряд в числе всегда будет одинаковое количество цифр. Число тем больше, чем больше цифры, стоящие в первых разрядах.

Начнем конструировать наше число. Самая большая первая цифра – 9, ее ставим первой, за ней идет цифра 4. С 3 начинается только карточка 32. С 2 начинаются карточки 21 и 28, так как 8 больше 1, то сначала ставим 28, а за ней 21. Затем аналогично идет карточка 16, а за ней 15. Получили число: 943228211615.

Ответ: 943228211615.

Комментарий:

Данная задача не требует никаких особых знаний математики, но все же для большинства участников она оказалась не из легких. Проблема состояла в том, что многие расположили все написанные на карточках числа в порядке возрастания для первого варианта, или в порядке убывания для второго варианта. Но это не привело к правильному ответу.

6-7 классы

Задача №6 (1 вариант)

Даша загадала трехзначное число. Все его цифры нечетные. Первая цифра больше второй, вторая больше третьей, а сумма всех трех цифр равна 11. Какое число загадала Даша?

Решение:

Третья цифра числа не может быть меньше 1, а вторая не может быть меньше 3, а первая не может быть меньше 5. Первая цифра не может быть больше $11 - 1 - 3 = 7$. Если она 7, то вторая с третьей дают в сумме 4, значит они обязательно равны 3 и 1, и это число 731. Если бы первая цифра была 5, то вторая и третья цифры должны были бы обязательно быть равны 3 и 1, чтобы обеспечить условие, что они все различны, но тогда сумма их была бы только 9. Значит, единственное число, которое подходит под все условия – 731.

Ответ: 731.

Задача №6 (2 вариант)

Света загадала трехзначное число. Все его цифры четные. Первая цифра меньше второй, вторая меньше третьей, а сумма всех трех цифр равна 14. Какое число загадала Света?

Решение:

Первая цифра числа не может быть меньше 2, а вторая не может быть меньше 4, значит третья цифра не больше $14 - 2 - 4 = 8$, при этом она не меньше 6. Если она 8, то сумма первой и второй 6, значит они обязательно 2 и 4, и это число 248. Если бы третья цифра была 6, то первая и вторая должны были бы обязательно быть равны 2 и 4, чтобы обеспечить условие, что они все различны, но тогда сумма их была бы только 12. Значит единственное число, которое подходит под все условия – 248.

Ответ: 248.

Комментарий:

Почему-то именно в этой задаче многие участники недостаточно внимательно прочитали условие и не учли, что в нем строго задана четность цифр. Также некоторые не поняли того, что порядок убывания или возрастания говорит о том, что все цифры различны. В задании требовалось привести ответ. Не учтя какое-либо из условий, ответов получалось несколько, что должно наводить на мысль, что что-то не так. В общем, стоит быть внимательнее. И если вы не уверены в каком-либо условии, лучше его уточнить, нежели полагаться на интуицию.

Стоит отметить, что во втором варианте условий была опечатка. Число загадывала Света, а спрашивалось, какое число загадала Даша. Ученики, заметившие ошибку, также получали баллы за это задание.

Задача №7 (1 вариант)

В столовой продается 3 вида супов, 7 видов салатов и 5 видов горячих. Сколько существует различных обедов, состоящих из супа, салата и горячего?

Решение:

Каждому виду супа можно поставить в пару каждый вид салатов, а каждому такому сочетанию любое из горячих. Значит всего можно составить $3 \cdot 7 \cdot 5 = 105$ различных обедов.

Ответ: 105.

Задача №7 (2 вариант)

В магазине продается 4 вида блокнотов, 5 видов карандашей и 6 вида ручек. Сколько существует различных наборов, состоящих из одного блокнота, одного карандаша и одной ручки?

Решение:

Каждому виду блокнотов можно поставить в пару каждый вид карандашей, а каждому такому сочетанию любую из ручек. Значит всего можно составить $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ различных наборов

Ответ: 120.

Комментарий:

Для решения данной задачи, требуются базовые знания комбинаторики. То, что большинство участников конкурса справились с данной задачей, говорит о том, что таковые знания имеются. Конечно, можно решить такую задачу и перебором, но количество вариантов настолько большое, что учесть все довольно сложно.

Задача №8 (1 вариант)

Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 4, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 1000 месте?

Решение:

Посчитаем, какое число стоит на втором месте. 4 в квадрате – это 16. Его сумма цифр 7, значит на втором месте стоит 8. На третьем месте стоит число 11, на четвертом 5, на пятом 8. Но мы уже знаем, что после 8 идет 11. Значит числа последовательности такие: 4; 8; 11; 5; 8; 11; 5; 8 ... т.е. сначала идет 4, а потом период из трех чисел 8, 11 и 5 повторяется. $1000 = 1 + 333 \cdot 3$. Это значит, что на тысячном месте стоит последнее из цикла число, это 5.

Ответ: 5.

Задача №8 (2 вариант)

Последовательность строится по следующему закону. На первом месте стоит число 6, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 3000 месте?

Решение:

Посчитаем, какое число стоит на втором месте. 6 в квадрате – это 36. Его сумма цифр 9, значит на втором месте стоит 10. На третьем месте стоит число 2, на четвертом 5, на пятом 8, на шестом 11, а на седьмом 5. Но мы уже знаем, что после 5 идет 8. Значит числа последовательности такие: 6; 10; 2; 5; 8; 11; 5; 8 ... т.е. сначала идет три числа, а потом период из трех чисел 5, 8 и 11 повторяется.

$3000 = 3 + 999 \cdot 3$. Это значит, что на 3000-м месте стоит последнее из цикла число, это 11.

Ответ: 11.

Комментарий:

Подобные задачи на построение последовательностей не редкость на олимпиадах по математике. И тот, кто сталкивался с такими задачами, знает, что чаще всего последовательность циклична. Принцип решения всегда один и тот же. Надо начать строить последова-

тельность вручную, и на определенном элементе либо замкнется цикл (встретится элемент, который уже был) либо вы заметите некую закономерность. Это и приведет вас к ответу.

Задача №9 (1 вариант)

После неудачного ремонта обе стрелки механических часов стали двигаться на 10% быстрее. Какое время покажут часы в 10 утра, если в полночь было выставлено верное время?

Решение:

Минутная стрелка должна делать 10 полных оборотов за 10 часов, но так как стрелка крутится на 10% быстрее, она сделает 11 полных оборотов, то есть будет на нуле. Часовая же стрелка аналогично вместо деления, соответствующего 10 часам, будет показывать на отметку 11. Значит часы покажут 11:00.

Ответ: 11:00.

Задача №9 (2 вариант)

После неудачного ремонта обе стрелки механических часов стали двигаться на 20% быстрее. Какое время покажут часы в 5 утра, если в полночь было выставлено верное время?

Решение:

Минутная стрелка должна делать 5 полных оборотов за 5 часов, но так как стрелка крутится на 20% быстрее, она сделает 6 полных оборотов, то есть будет на нуле. Часовая же стрелка аналогично вместо деления, соответствующего 5 часам, будет показывать на отметку 6. Значит часы покажут 6:00.

Ответ: 6:00.

Комментарий:

В этой задаче есть «подводный камень» на которые очень многие напоролась. Если часы идут на 10% или 20% быстрее (в зависимости от варианта условий), то обе стрелки будут двигаться соответственно на 10% или 20% быстрее. А значит, и время они покажут соответственно на 10% или 20% больше. Вот и все решение задачи. Но многие посчитали, что поскольку две стрелки двигаются быстрее на 10%, то время идет быстрее на 20%. Также и во втором варианте. Если две стрелки двигаются быстрее на 20%, то время идет быстрее на 40%. Эти рассуждения привели их к неправильному ответу.

8-9 классы

Задача №6 (1 вариант)

Страницы в книге пронумерованы с первой. Для нумерации страниц в книге потребовалось 2118 цифр. Сколько страниц в этой книге?

Решение:

На номера с 1 по 9 нужно 9 цифр, на номера с 10 по 99 нужно 180 цифр (90 номеров по 2 цифры). Осталось еще $2118 - 9 - 180 = 1929$ цифр. $1929/3 = 643$. 643-е трехзначное число это 742. Значит, в книге 742 страницы.

Ответ: 742.

Задача №6 (2 вариант)

Страницы в книге пронумерованы с первой. Для нумерации страниц в книге потребовалось 2625 цифр. Сколько страниц в этой книге?

Решение:

На номера с 1 по 9 нужно 9 цифр, на номера с 10 по 99 нужно 180 цифр (90 номеров по 2 цифры). Осталось еще $2625 - 9 - 180 = 2436$ цифр. $2436/3 = 812$. 812-е трехзначное число это 911. Значит, в книге 911 страниц.

Ответ: 911.

Комментарий:

С этим заданием трудностей у участников не возникло. Особых знаний или неочевидных идей тут не требовалось. Простой подсчет приводит к правильному ответу. Главное считать внимательно, не допускать ошибок.

Задача №7 (1 вариант)

Катя ежедневно записывает дату и вычисляет произведение написанных цифр. Например, 6-го сентября она записала 06.09 и вычислила произведение $0*6*0*9 = 0$. Какое самое большое произведение она может получить?

Решение:

Месяц с самым большим произведением цифр – декабрь. Так как у всех месяцев от января до октября произведение равно 0, а у ноября - 1. Самое большое произведение цифр у чисел от 1 до 31 – 18, у числа 29. Значит, самое большое произведение получается 29 декабря. $2*9*1*2=36$.

Ответ: 36.

Задача №7 (2 вариант)

Миша ежедневно записывает дату и вычисляет сумму написанных цифр. Например, 6-го сентября он записал 06.09 и вычислил сумму $0 + 6 + 0 + 9 = 15$. Какую самую большую сумму он может получить?

Решение:

Месяц с самой большой суммой цифр – сентябрь. Так как у всех месяцев до него сумма цифр от 1 до 8, а у октября, ноября и декабря суммы цифр 1, 2 и 3 соответственно. Самая большая сумма цифр у чисел от 1 до 31 – 11, у числа 29. Значит самая большая сумма получается 29 сентября. $2+9+0*9=20$.

Ответ: 20.

Комментарий:

С задачей справилось большинство учеников. Иногда встречались неверные ответы, чаще всего основанные на том, что самое большое произведение или сумма цифр будет у самой поздней даты. Что говорит о том, что эти участники недостаточно времени уделили этой задаче.

Задача №8 (1 вариант)

Найдите наибольшее натуральное число, любые две последовательные цифры которого образуют число, кратное 17.

Решение

Перечислим все двузначные числа кратные 17: 17, 34, 51, 68, 85.

Пусть число начинается на 17, но тогда какую бы следующую цифру мы не поставили, не удастся получить число кратное 17. Получилось число 17.

Пусть число начинается на 34, тогда так же какую бы следующую цифру мы не поставили, не удастся получить число кратное 17. Получилось число 34.

Если число начинается на 51, то дальше обязательно идет 7, после чего мы опять ничего не можем поставить. Получилось число 517.

Если число начинается на 68, то дальше обязательно идет 5, потом 1, потом 7, после чего мы опять ничего не можем поставить. Получилось число 68517.

Если число начинается на 85, то дальше обязательно идет 1, потом 7, после чего мы опять ничего не можем поставить. Получилось число 8517.

Значит, наибольшее число 68517.

Ответ: 68517.

Задача №8 (2 вариант)

Найдите наибольшее натуральное число, любые две последовательные цифры которого образуют точный квадрат.

Решение:

Перечислим все двузначные числа, являющиеся точным квадратом: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Пусть число начинается на 16, тогда дальше обязательно идет цифра 4, после нее обязательно идет 9, после чего мы не можем ничего поставить. Получилось число 1649.

Пусть число начинается на 25, но тогда какую бы следующую цифру мы не поставили, не удастся получить точный квадрат. Получилось число 25.

Пусть число начинается на 36, тогда дальше обязательно идет цифра 4, после нее обязательно идет 9, после чего мы не можем ничего поставить. Получилось число 3649.

Пусть число начинается на 49, но тогда какую бы следующую цифру мы не поставили, не удастся получить точный квадрат. Получилось число 49.

Пусть число начинается на 64, тогда дальше обязательно идет цифра 9, после чего мы не можем ничего поставить. Получилось число 649.

Пусть число начинается на 81, тогда дальше обязательно идет цифра 6, после нее обязательно идет 4, после нее обязательно идет 9, после чего мы не можем ничего поставить. Получилось число 81649.

Значит, наибольшее число 81649.

Ответ: 81649.

Комментарий:

В первом варианте задача решалась немного легче, так как число 34 сразу отбрасывалось, за неимением общих цифр с остальными. Оставалось выстроить четыре числа так, чтобы каждое следующее начиналось с последней цифры предыдущего. Во втором варианте также отбрасывалось число 25, но не все заметили, что, используя числа 81 и 16, ответ получится больше чем с числом 36. Поэтому было достаточно работ, в которых ученики ответили 3649.

Задача №9 (1 вариант)

Первый вторник месяца Семён провёл в Туле, а первый вторник после первого понедельника — в Воронеже. В следующем месяце Семён первый вторник провёл в Ростове, а первый вторник после первого понедельника — в Екатеринбурге. Сможете ли вы определить, какого числа и какого месяца Семён был в Екатеринбурге?

Решение:

Поскольку Семён не мог провести один и тот же день и в Туле, и в Воронеже, значит, месяц начинался во вторник (ведь иначе первый вторник и первый вторник после первого понедельника совпали бы). Аналогично заключаем, что и второй месяц должен начинаться во вторник. Это возможно только в случае, когда один месяц — февраль, а другой — март, причём год не високосный. Отсюда уже легко получить, что в Туле Семён был 1 февраля, в Воронеже — 8 февраля, в Ростове — 1 марта, в Екатеринбурге — 8 марта.

Ответ: 8 марта.

Задача №9 (2 балл)

Последнее воскресенье месяца Игорь провёл в Мурманске, а последнее воскресенье до последнего понедельника - в Новосибирске. В предыдущем месяце Игорь провёл последнее воскресенье в Томске, а последнее воскресенье до последнего понедельника — в Кирове. Сможете ли вы определить, какого числа и какого месяца Игорь был в Кирове?

Решение:

Поскольку Игорь не мог провести один и тот же день и в Мурманске, и в Новосибирске, значит, месяц заканчивался в воскресенье (ведь иначе последнее воскресенье и последнее воскресенье до последнего понедельника совпали бы). Аналогично заключаем, что и второй месяц должен заканчиваться в воскресенье. Это возможно только в случае, когда один месяц — февраль, а предыдущий — январь, причём год не високосный. Отсюда уже легко получить, что в Мурманске Игорь был 28 февраля, в Новосибирске — 21 февраля, в Томске — 31 января, в Кирове — 24 января.

Ответ: 24 января.

Комментарий:

В условии этой задачи легко запутаться, наверно это и стало причиной того, что большое количество участников попросту не написали никакого ответа. При решении подобных задач нужно быть предельно внимательным и проверять полученные выводы.



Электронная школа Знаника
<http://znanika.ru>