Волшебный сундучок

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор задач творческой части заданий.

4 класс

Задача №1 (6 баллов)

На дне рождения у Пети было 7 гостей. Все присутствующие (гости и Петя) съели 78 конфет, причём все съели разное количество конфет, но каждый более 5 конфет. Могли ли трое гостей съесть не менее половины конфет?

Решение

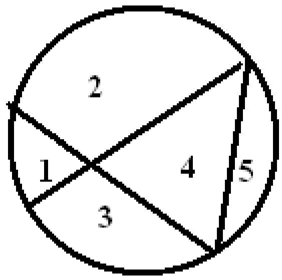
Присутствовало 8 человек. Если бы трое съели не менее половины всех конфет, то оставшимся пяти присутствующим осталось бы не более 39 конфет. Но, по условию, 5 человек должны съесть не менее 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40 конфет. Следовательно, трое гостей не могли съесть не менее половины конфет.

Ответ: Не могли.

Комментарий

Эту задачу смогли правильно решить менее половины учеников. Основная ошибка остальных заключалась в том, что они по каким-то причинам не учли, что все присутствующие съели разное количество конфет, хотя об этом сказано в условии. Стоит внимательнее читать условие.

Задача №2 (6 баллов)



Круглый торт разрезали с помощью трёх прямолинейных разрезов так, что на каждом куске оказалась ровно одна розочка. Могло ли на торте быть ровно 5 розочек?

Решение

Могло. Например, разрезы, удовлетворяющие условию, изображены на рисунке.

Ответ: Могло.

Комментарий

Построить пример для этой задачи смогли 63% участников. Ошибка многих заключалась в том, что они не поняли, что прямолинейный разрез делит торт от грани до грани, и не может оборваться на середине торта.

Задача №3 (6 баллов)

Имеется сто билетов с номерами 00, 01, 02, …, 98, 99 и десять ящиков с номерами 0, 1, 2, …, 9. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика содержится в записи номера билета. Может ли после некоторого раскладывания всех билетов по указанному правилу хотя бы один ящик оказаться пустым?

Решение

Билеты с номерами 00, 11, 22, …, 99 попадут при любом раскладывании в ящики с номерами 0, 1, 2, …, 9. Поэтому ни один ящик не будет пустым.

Ответ: Не может.

Комментарий

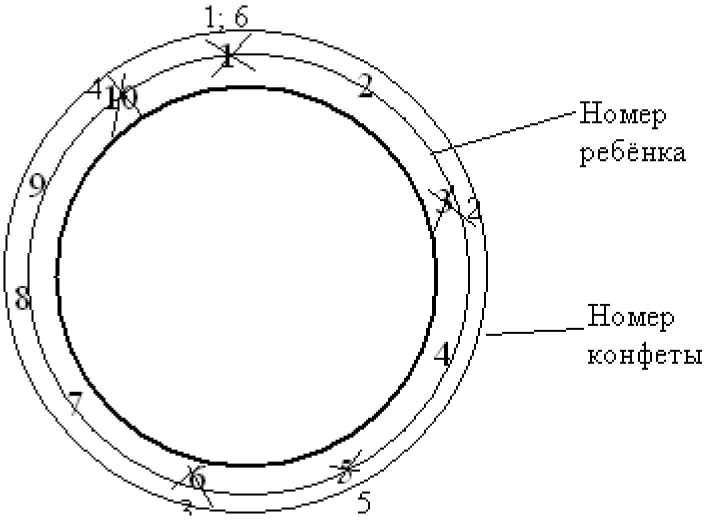
С этим заданием справились чуть более половины учеников. Проблема в том, что ученики зачастую не приводят решение целиком, а только дают ответ. К сожалению, правильный ответ на вопрос «может ли…?» (или другой вопрос, подразумевающий ответ да/нет) оценивается всего в один балл. Не ленитесь приводить решение и оформляйте его наиболее подробно. За излишнюю подробность баллы не снимают, а вот за утверждения без доказательства вполне могут.

Задача №4 (6 баллов)

В детском саду воспитательница рассадила 10 детей за круглым столом и начала раздавать им по конфете следующим образом: вначале некоторому ребёнку, потом, двигаясь по часовой стрелке, ребёнку, сидящему через одного от него, затем пропустила двоих и дала конфету следующему. Далее пропустила троих и т. д. Может ли она таким образом дать каждому ребёнку ровно по одной конфете, если при счёте не пропускала детей, получивших конфету?

Решение

Пронумеруем детей, сидящих за круглым столом: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, как показано на рисунке. Будем зачёркивать номера по указанному правилу и записывать номер конфеты, пока не дойдём до уже зачёркнутого номера. Шестая конфета достанется ребёнку, уже получившему конфету. Следовательно, воспитательница не сможет таким образом дать каждому ребёнку ровно по одной конфете.



Ответ: Не сможет.

Комментарий

Задача довольно простая. Нарисовав схематично рисунок и начав раздавать конфеты по указанному правилу, ответ получается сам собой. Многие ученики потеряли баллы на этой задаче в связи с недостаточно подробным оформлением своего решения.

5 класс

Задача №1 (6 баллов)

При обработке результатов социологического опроса получили следующие данные:
число опрошенных — 2000;
любят мороженое — 1648;
любят пирожные — 1215;
любят и мороженое и пирожные — 847.

Верно ли обработаны результаты опроса?

Решение

Если сложить количества любящих мороженое и любящих пирожные, то получим 2863. Так как любящих и мороженое, и пирожные мы учли дважды, то количество опрошенных равно 2863 – 847 = 2016, что не соответствует условию.

Ответ: Нет.

Комментарий

Правильное решение в этой задаче смогли привести 59% учеников. Вряд ли многие не смогли ее решить, проблема скорее в том, что ученики зачастую не приводят решение целиком, а только дают ответ. К сожалению, правильный ответ на вопрос «верно ли…?» (или другой вопрос, подразумевающий ответ да/нет) оценивается всего в один балл. Не ленитесь приводить решение и оформляйте его наиболее подробно. За излишнюю подробность баллы не снимают, а вот за утверждения без доказательства вполне могут.

Задача №2 (6 баллов)

В классе несколько человек начали собирать марки. Если Нина отдаст Коле из своих марок на одну марку меньше половины собранных ею марок, то у всех начинающих коллекционеров марок станет поровну. Сколько марок собрал Коля?

Решение

Если Нина отдаст Коле на одну марку меньше половины своих марок, то у нее останется на одну марку больше половины своих марок. Разница между этими двумя количествами составляет 2 марки. Раз после такой операции у Нины и Коли марок станет поровну, то Коля собрал 2 марки.

Ответ: Две.

Комментарий

Эту задачу смогли решить правильно только 43% учеников. Здесь было важно понять, что ответ не зависит от количества человек собирающих марки и задачи можно решать на примере двух человек (Нины и Коли). В таком случае задача становится простой для понимания, соответственно и решить ее легче.

Задача №3 (6 баллов)

Имеются гирьки массой 1 г, 2 г, 3 г, …, 19 г, 20 г. Можно ли их разложить на три равные по массе кучки?

Решение

Масса всех гирек равна 1 + 2 + 3 + … + 20 = 210 г. Следовательно, если можно разложить все гирьки на три равные по массе кучки, то масса гирек в каждой кучке должна равняться 210:3 = 70 г. Разложение может быть, например, таким:

1-я кучка — 20 г + 19 г + 18 г + 13 г = 70 г;

2-я кучка — 17 г + 16 г + 15 г + 14 г + 8 г = 70 г;

3-я кучка — 12 г + 11 г + 10 г + 9 г + 7 г + 6 г + 5 г + 4 г + 3 г + 2 г + 1 г = 70 г.

Ответ: Можно.

Комментарий

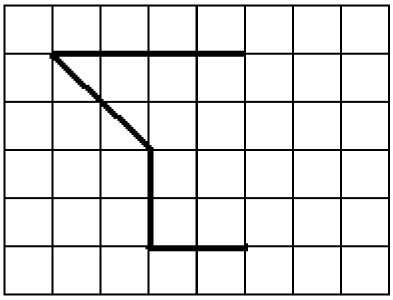
С этой задачей справились чуть более половины участников, но многие из них не получили за задачу полный балл. Их решения заканчивалось на том, что общая сумма масс делится на количество групп, на которые нужно разложить гирьки. Но это решение не является полным, ведь подобное утверждение не гарантирует возможность разбиения на группы. Рассмотрим простой пример:

Имеются гирьки массой 2, 4, 6 и 10 граммов. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки? Несмотря на то, что сумма масс 2+4+6+10=22 делится на 2, подобный набор гирек нельзя разбить на две кучки по 11 грамм.

Поэтому в данной задаче необходимо было привести пример разделения гирек на кучки равные по массе. К сожалению, многие этого не сделали.

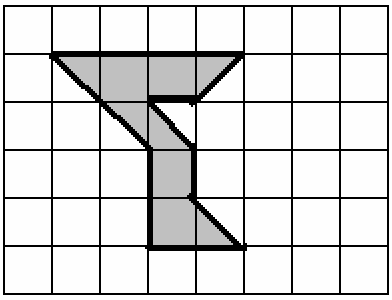
Задача №4 (6 баллов)

Площадь каждого квадрата сетки на рисунке равна 1см. Проведите отрезки по линиям сетки или по диагоналям квадратов, не пересекающие изображённую ломаную в точках, отличных от концов, так, чтобы получилась фигура, площадь которой равна 650 мм^2.



Решение

Изображённая на рисунке фигура состоит из 4-х целых клеток и 5-и половинок клеток. Так как площадь одной клетки равна 1 см^2 или 100 мм^2, то её площадь равна 100 мм$^2\cdot$4 + 50



мм$^2\cdot$5, то есть 650 мм^2.

Комментарий

Решение данной задачи заключалось в построении примера. К сожалению, только 38% учеников смогли это сделать.

6 класс

Задача №1 (6 баллов)

Десять человек сдавали экзамен. Они вытягивали билеты наугад по очереди по одному из 10 билетов, лежащих на столе, причём каждый вытягивал билеты из оставшихся. Один из экзаменующихся знал ответы ко всем 10 билетам, один — к билетам № 1, 2, …, 9, один — к билетам 1, 2, …, 8, и т. д., один только к билету №1. Могут ли ровно 5 человек вытянуть билеты, на которые они не знают ответы?

Решение

Обозначим экзаменующегося, знающего ответы на k билетов, через k, k = 1, 2, …, 10. Пять человек не будут знать ответы на вытянутые билеты, например, если учащиеся 10, 9, 8, 7, 6 вытянут билеты соответственно с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Тогда учащимся 5, 4, 3, 2, 1 не останутся билеты, ответы на которые они знают.

Ответ: Могут.

Комментарий

Решение данной задачи заключается в конструировании примера, когда условие выполняется. Не думаю, что можно описать какой-либо стандартный метод, как это делать.

Тут у каждого свой подход. Навык решения подобных задач нарабатывается с опытом. Поэтому только половина участников смогли решить эту задачу.

Задача №2 (6 баллов)

В классе 16 человек. Может ли в нём девочек быть меньше трёх четвертей, но больше 70%?

Решение

Так как $\frac{3}{4}$ от 16 равно $16\cdot\frac{3}{4}=12$, а 70% от этого же числа равно $\frac{16\cdot 70}{100}=11{,}2$, то девочек в классе меньше 12, но больше 11,2, что невозможно.

Ответ: Не может.

Комментарий

Правильное решение в этой задаче смогли привести только 59% учеников. Не думаю, что многие не смогли ее решить, проблема скорее в том, что участники зачастую не приводят решение целиком, а только дают ответ. К сожалению, правильный ответ на вопрос «может ли…?» (или другой вопрос, подразумевающий ответ да/нет) оценивается всего в один балл. Не ленитесь приводить решение и оформляйте его наиболее подробно. За излишнюю подробность баллы не снимают, а вот за утверждения без доказательства вполне могут.

Задача №3 (6 баллов)

Имеются гирьки массой 2 г, 4 г, 6 г, …, 38 г, 40 г. Можно ли их разложить на три равные по массе кучки?

Решение

Масса всех гирек равна 2 + 4 + 6 + … + 38 + 40 = 2(1 + 2 + 3 + … + 19 + 20) = 2((1 + 20) + (2 + 19) + … + (10 + 11)) = 2·21·10 = 420 г. Следовательно, если можно разложить все гирьки на три равные по массе кучки, то масса гирек в каждой кучке должна равняться 420:3 = 140 г. Разложение может быть, например, таким:

1-я кучка — 40 г + 38 г + 36 г + 26 г = 140 г;

2-я кучка — 34 г + 32 г + 30 г + 28 г + 16 г = 140 г;

3-я кучка — 24 г + 22 г + 20 г + 18 г + 14 г + 12 г + 10 г + 8 г + 6 г + 4 г + 2 г = 140 г.

Ответ: Можно.

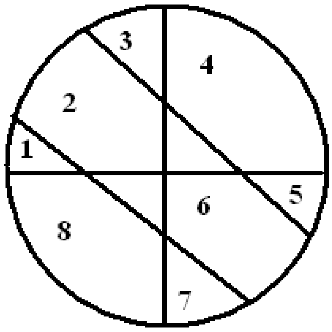
Комментарий

С этой задачей справились более половины участников, но многие из них не получили за задачу полный балл. Их решения заканчивалось на том, что общая сумма масс делится на количество групп, на которые нужно разложить гирьки. Но это решение не является полным, ведь подобное утверждение не гарантирует возможность разбиения на группы. Рассмотрим простой пример:

Имеются гирьки массой 2, 4, 6 и 10 граммов. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки? Несмотря на то, что сумма масс 2+4+6+10=22 делится на 2, подобный набор гирек нельзя разбить на две кучки по 11 грамм.

Поэтому в данной задаче необходимо было привести пример разделения гирек на кучки равные по массе. К сожалению, многие этого не сделали.

Задача №4 (6 баллов)



Круглый торт разрезали с помощью четырёх прямолинейных разрезов так, что на каждом куске оказалась ровно одна розочка. Могло ли на торте быть ровно 10 розочек?

Решение

Могло. Соответствующие разрезы указаны на рисунке.

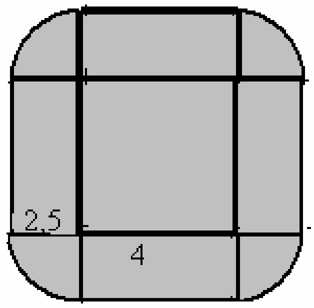
Ответ: Могло.

Комментарий

В этой задаче 59% участников смогли построить правильный пример. Сложно предположить, почему это не получилось у остальных, наверное, они просто мало времени уделили этой задаче. При построении примера не важно, под каким углом пересечь торт первой прямой. Важно понимать, что чем больше будет новых точек пересечения прямых при добавлении очередного разреза, тем больше кусков будет на торте. В качестве упражнения, попробуйте построить пример для всех чисел от пяти до одиннадцати розочек включительно.

7 класс

Задача №1 (6 баллов)



Круг радиуса 2,5 см перемещается по столу так, что его центр обходит контур квадрата со стороной 4 см. Чему равна площадь части стола, образованная следом круга, с точностью до 1 $см^2$?

Решение

Изобразим множество точек, являющихся объединением кругов радиусов 2,5 см с центрами в точках контура квадрата со стороной 10 см (см. рис.). Полученная фигура состоит из квадрата 4 см $\times$ 4 см, 4-х прямоугольников 4 см $\times$ 2,5 см, 4-х четвертей круга радиуса 2,5 см. Её площадь равна $4^2 + 4\cdot4\cdot2{,}5 + \pi\cdot2{,}5^2 \approx 76$ см^2.

Ответ. 76 см^2.

Комментарий

С данным заданием справились чуть менее половины участников, только 45%. В подобных задачах очень важен правильный рисунок. После его построения, необходимо разбить полученную область на части, площади которых легко считаются. Далее решение не составит труда, конечно же, если вы знаете формулы нахождения площадей простых фигур**.**

Задача №2 (6 баллов)

Имеются гирьки массой 1 г, 2 г, 3 г, …, 22 г, 23 г. Можно ли их разложить на четыре равные по массе кучки?

Решение

Масса всех гирек равна 1 + 2 + 3 + … + 22 + 23 = (1 + 23) + (2 + 22) + … + (11 + 13) + 12 = 24·11 + 12 = 12·23 = 276 г. Следовательно, если можно разложить все гирьки на четыре равные по массе кучки, то масса гирек в каждой кучке должна равняться 276:4 = 69 г. Разложение может быть, например, таким:

1-я кучка — 23 г + 22 г + 21 г + 3 г = 69 г;
2-я кучка — 20 г + 19 г + 18 г + 12 г = 69 г;
3-я кучка — 17 г + 16 г + 15 г + 14 г + 7 г = 69 г;
4-я кучка — 13 г + 11 г + 10 г + 9 г + 8 г + 6 г + 5 г + 4 г + 2 г + 1 г = 69 г.

Ответ. Можно.

Комментарий

С этой задачей справились более половины участников, но многие из них не получили за задачу полный балл. Их решения заканчивалось на том, что общая сумма масс делится на количество групп, на которые нужно разложить гирьки. Но это решение не является полным, ведь подобное утверждение не гарантирует возможность разбиения на группы. Рассмотрим простой пример:

Имеются гирьки массой 2, 4, 6 и 10 граммов. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки? Несмотря на то, что сумма масс 2+4+6+10=22 делится на 2, подобный набор гирек нельзя разбить на две кучки по 11 грамм.

Поэтому в данной задаче необходимо было привести пример разделения гирек на кучки равные по массе. К сожалению, многие этого не сделали.

Задача №3 (6 баллов)

Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, 002, …, 998, 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, 02, …, 98, 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика получается зачёркиванием одной цифры в записи номера билета. Может ли после некоторого раскладывания всех билетов по указанному правилу хотя бы один ящик оказаться пустым?

Решение

Может. Например, ящик с номером 98 может быть пустым, если билеты с номерами, содержащими цифры 9, 9, 8, опустить в ящик 99, билеты с номерами, содержащими цифры 9, 8, 8 опустить в ящик 88, а билеты с номерами, содержащими цифру, отличную от 8 и 9, опустить в ящик с номером, содержащем эту цифру.

Ответ. Может.

Комментарий

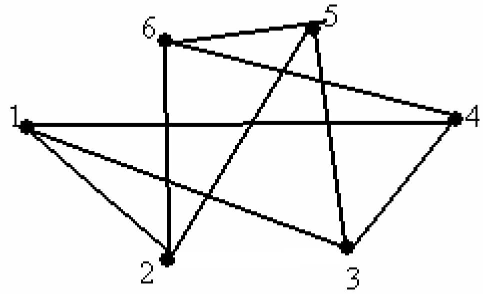
С этим заданием справились только 38% учеников. Хотя задача не такая уж и сложная. Для любого ящика цифры номера, которого различны, можно построить пример, когда он окажется пустым. Необходимо только понять какие билеты могут в него попасть, и по каким ящика кроме этого можно эти билеты разложить.

Задача №4 (6 баллов)

Может ли у каждого из учащихся в классе быть ровно трое друзей в этом классе, если в классе: 1) 25 учащихся; 2) 18 учащихся?

Решение

Обозначим через n количество учащихся в классе. Тогда количество «дружб», по условию, равно $\frac{3n}{2}$.



1) Так как при n = 25 число $\frac{3n}{2}$ не является целым, то при 25 учащихся в классе условие не может быть выполнено.

2) При n = 18 количество «дружб» равно 27. Покажем, что у каждого из учащихся в классе может быть ровно трое

друзей. Разобьём класс на 4 группы: в трёх группах по 4 человека, а в одной — 6. В группах по 4 человека любые двое могут быть друзьями, причём члены каждой из этих групп больше ни с кем в классе не дружат. Тогда у каждого из этих учащихся в классе ровно трое друзей. «Дружбы» членов группы из 6 человек показаны на рисунке.

Ответ. 1) Нет; 2) да.

Комментарий

С последней задачей справились менее половины участников конкурса. Большая часть учеников смогли решить первый пункт задачи, показав, что 25*3 не делится на 2. Но построить пример для второго пункта задачи смогли не многие. Основная ошибка во втором пункте заключалась в том, что ученики утверждали, что ответ «да» лишь потому, что 18*3 делится на 2. К сожалению, этот факт не объясняет возможность иметь три друга для каждого учащегося. Необходимо было построить пример.

8 класс

<u>Задача №1 (6 баллов)</u>

Имеются гирьки массой 3 г, 6 г, 9 г, …, 66 г, 69 г. Можно ли их разложить на четыре равные по массе кучки?

Решение

Масса всех гирек равна $3 + 6 + 9 + \ldots + 66 + 69 = 3(1 + 2 + 3 + \ldots + 22 + 23) = 3((1 + 23) + (2 + 22) + \ldots + (11 + 13) + 12) = 3\cdot(24\cdot11 + 12) = 3\cdot23\cdot12 = 828$ г. Следовательно, если можно разложить все гирьки на четыре равные по массе кучки, то масса гирек в каждой кучке должна равняться $828:4 = 207$ г. Разложение может быть, например, таким:

1-я кучка — 69 г + 66 г + 63 г + 9 г = 207 г;

2-я кучка — 60 г + 57 г + 54 г + 36 г = 207 г;

3-я кучка — 51 г + 48 г + 45 г + 42 г + 21 г = 207 г;

4-я кучка — 39 г + 33 г + 30 г + 27 г + 24 г + 18 г + 15 г + 12 г + 6 г + 3 г = 207 г.

Ответ: Можно.

Комментарий

С этой задачей справились более половины участников, но многие из них не получили за задачу полный балл. Их решения заканчивалось на том, что общая сумма масс делится на количество групп, на которые нужно разложить гирьки. Но это решение не является полным, ведь подобное утверждение не гарантирует возможность разбиения на группы. Рассмотрим простой пример:

Имеются гирьки массой 2, 4, 6 и 10 граммов. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки? Несмотря на то, что сумма масс 2+4+6+10=22 делится на 2, подобный набор гирек нельзя разбить на две кучки по 11 грамм.

Поэтому в данной задаче необходимо было привести пример разделения гирек на кучки равные по массе. К сожалению, многие этого не сделали.

<u>Задача №2 (6 баллов)</u>

Цена торта равнялась 110 зедов (зед — условная денежная единица) и состояла из стоимостей продуктов, изготовления и реализации. Когда стоимость продуктов возросла на 20%, а расходы на изготовление и реализацию, возросли на 10%, то цена торта стала равняться 129 зедам. Какова будет цена торта, если после возрастания цен стоимость продуктов ещё увеличится на 5%, а расходы на изготовление и реализацию увеличатся ещё на 10%?

Решение

Обозначим через *x* зедов, *y* зедов, *z* зедов первоначальные расходы на продукты, изготовление и реализацию торта соответственно. Тогда на основании условия имеем следующие 2 уравнения:

$$\begin{cases} x+y+z=110, \\ 1,2x+1,1(y+z)=129. \end{cases}$$

Умножив обе части первого уравнения на 1,1 и вычтя из каждой части 2-го уравнения соответствующую часть 1-го, получим: 0,1*x* = 8, *x* = 80. Подставив это значение в первое уравнение, будем иметь: *y* + *z* = 30.

Требуется найти значение выражения $1,05\cdot 1,2x+1,1\cdot 1,1(y+z)$ при $x=80, y+z=30$. Получаем $1,05\cdot 1,2\cdot 80+1,1\cdot 1,1\cdot 30=137,1$. Искомая цена равна 137,1 зеда.

Ответ: 137,1 зеда.

Комментарий

С этой задачей справилось большинство участников. Самая распространенная ошибка заключалась в том, что повторное повышение цен ученики применяли не к текущим ценам (после первого повышения), а к первоначальным. Рассуждения в таком случае аналогичны, но ответ получается другой. По этой причине многие потеряли несколько баллов в данной задаче.

<u>Задача №3 (6 баллов)</u>

В футбольном турнире 6 команд сыграли между собой 2 тура — каждая команда сыграла с двумя разными командами. Обязательно ли найдутся три команды, не сыгравшие пока между собой?

Решение

Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с двумя командами и с тремя не сыграла. Предположим, что среди этих трёх команд нет двух, не сыгравших пока между собой. Тогда все эти три команды сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть 3 матча. Однако за один тур эти три команды могли провести между собой только 1 матч, а за 2 тура — 2 матча. Следовательно, среди этих трёх команд есть две, не сыгравшие пока между собой. Вместе с рассмотренной командой они образуют три команды, не сыгравшие пока между собой.

Ответ: Обязательно.

Комментарий

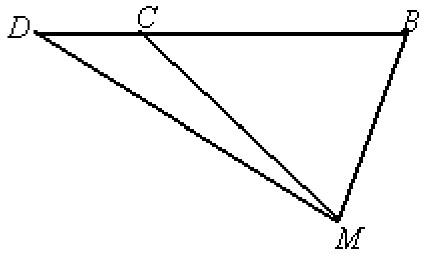
С данной задачей справились около трети учеников, всего 37%. Основная ошибка заключалась в том, что они строили пример турнирной таблицы, когда не найдутся 3 команды, не сыгравшие между собой. Такой пример заключается в разбиении всех команд на две равные группы, и в каждой группе каждая команда сыграла со всеми остальными. Но при данном условии задачи, где ограничено количество сыгранных туров, подобный пример невозможен, так как в нем найдутся команды, которые должны были сыграть более одного матча за тур. В приведенном решении понятно описано, почему такого примера не может быть.

<u>Задача №4 (6 баллов)</u>

Как расположены дуб, сосна и берёза, если с любого места расстояние до сосны меньше хотя бы одного из расстояний до дуба или берёзы?

Решение

Обозначим места расположения дуба, сосны и берёзы соответственно буквами *D*, *C*, *B*. Известно, что для любой точки *M* расстояние *MC* меньше или *MD*, или *MB*. Если точки *D*, *C*, *B* не лежат на одной прямой, то нетрудно указать точки, в которых нарушается условие задачи. Например, такой точкой является центр окружности, описанной около треугольника *DCB*. Следовательно, точки *D*, *C*, *B* лежат на одной прямой. Если точка *C* лежит вне отрезка *BD*, то легко также указать точки, в которых нарушается условие задачи. Покажем, что для произвольной точки *C*, лежащей между *D* и *B*, условие выполняется.



Пусть *M* — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой *BD*. Соединим точку *C*, лежащую между точками *B* и *D*, с точкой *M* (см. рис.). Если *CM* перпендикулярна *BD*, то *CM* короче и *DM*, и *BM*. Если *CM* не перпендикулярна *BD*, то один из углов *DCM* или *BCM* тупой, и сторона, лежащая против него, (*DM* или *BM*) больше *CM*.

Нетрудно показать, что условие выполняется и для точек, лежащих на прямой *BD*.

Ответ: Сосна находится между дубом и берёзой.

Комментарий

Практически все смогли привести правильный ответ к данной задаче, но далеко не каждый смог свой ответ обосновать или доказать, что других ответов нет. В задачах, где требуется найти то или иное геометрическое место точек (ГМТ) удовлетворяющих определенным условиям необходимо доказать, что во всех найденных вами точках условие выполняется, и доказать, что оно не выполняется во всех остальных точках. Без этого решение не является полным.

9 класс

<u>Задача №1 (6 баллов)</u>

Известно, что общая масса трёх учеников не менее 120 кг. Когда их взвесили по двое, то весы показали не более 100 кг, не более 80 кг и не более 60 кг. Каковы массы этих учащихся?

Решение

Обозначим массы учеников через m_1, m_2, m_3. Предположим, что $m_1 + m_2 \le 100$, $m_1 + m_3 \le 80$, $m_2 + m_3 \le 60$. Это всегда можно обеспечить выбором нумерации.

Сложив левые и правые части этих неравенств, получим неравенство $2(m_1 + m_2 + m_3) \le 240$ или $m_1 + m_2 + m_3 \le 120$. Но по условию $m_1 + m_2 + m_3 \ge 120$. Следовательно, $m_1 + m_2 + m_3 = 120$.

Если сложить неравенства $m_1 + m_2 \le 100$, $m_1 + m_3 \le 80$, то получим неравенство $m_1 + m_2 + m_1 + m_3 \le 180$, или $m_1 \le 60$. Аналогично получим неравенства $m_2 \le 40$, $m_3 \le 20$. Так как $m_1 + m_2 + m_3 = 120$, то $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 20$.

Ответ: 60 кг, 40 кг, 20 кг.

Комментарий

С этой задачей справились две трети участников 66%. Основная ошибка заключалась в том, что при решении ученики использовали, описанные в условии неравенства как равенства (например, брали массу всех сразу равную 120 кг). Они получили правильный ответ, но подобное упущение не доказывает единственность полученного ответа.

Задача №2 (6 баллов)

Одного из школьников 9 «А» класса перевели в 9 «Б» класс. Может ли средний рост школьников в каждом из этих классов (9 «А» и 9 «Б») увеличиться?

Решение

Может, если в 9 «А» классе есть самый низкий учащийся, и он выше самого высокого учащегося 9 «Б» класса. Докажем это.

Обозначим рост учащихся 9 «А» класса через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_1 < a_2 \le \ldots \le a_n$, а рост учащихся 9 «Б» класса через $b_1, b_2, \ldots, b_k$, $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_k$, через $a_{ср.}$ и $b_{ср.}$— средний рост в 9 «А» и 9 «Б» до перехода, а через $a'_{ср.}$ и $b'_{ср.}$— после перехода.

Так как $a_1 < a_2 \le \ldots \le a_n$, то $a_2 + \ldots + a_n > (n-1)a_1$.

Следовательно, $n(a_2 + \ldots + a_n) = (a_2 + \ldots + a_n) + (n-1)(a_2 + \ldots + a_n) > (n-1)a_1 + (n-1)\cdot$ $\cdot(a_2 + \ldots + a_n) = (n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

Тогда $\frac{a_2 + \ldots + a_n}{n-1} > \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, то есть $a'_{ср.} > a_{ср}$ — средний рост в 9 «А» увеличился.

Аналогично, так как $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_k < a_1$, то $(k+1)(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) < ka_1 + k(b_1 + b_2 + \ldots + b_k)$ или $\frac{b_1 + \ldots + b_k}{k} < \frac{a_1 + b_1 + \ldots + b_k}{k+1}$, то есть $b'_{ср.} > b_{ср.}$ — средний рост в 9 «Б» увеличился.

Ответ: Может.

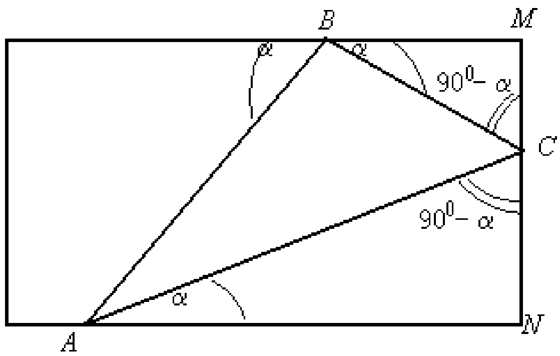
Комментарий

Решение задачи очень простое. Необходимо просто построить пример, когда все ученики класса А выше всех учеников класса В. После чего показать, что условие выполняется при переводе самого маленького ученика из А. Не смотря на столь простое решение, с данной задачей справились только 25% участников. Основная масса участников дали ответ без каких-либо объяснений.

Задача №3 (6 баллов)

Может ли шар, лежащий возле борта на бильярдном столе прямоугольной формы после удара кием отразиться сначала от одного борта, затем от соседнего и пройти через исходное положение, если отражение от борта происходит по закону: угол падения равен углу отражения?

Решение



Предположим, что существует траектория, удовлетворяющая условию. На рисунке она изображена замкнутой ломаной *ABCA*. Пользуясь законом отражения, найдём угол *CAN*. Он равен α. Так как *BM* и *AN* параллельны, то угол *BAN* также равен α, где α — угол, под которым шар направили к борту *BM*. Но $\angle BAN = \angle BAC + \angle CAN$. Следовательно,

$\angle BAC = 0$. Получили противоречие. Ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Ответ: Не может.

Комментарий

С задачей справились всего 23% учеников. В данной задаче требовалось правильно нарисовать рисунок, после чего найти все равные углы, что довольно просто, при пересечениях параллельных прямых и зная, что угол падения равен углу отражения. Внимательно обозначив все углы, сразу же получаем противоречие.

Задача №4 (6 баллов)

В футбольном турнире 14 команд сыграли между собой 6 туров — каждая команда сыграла с шестью разными командами. Обязательно ли найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча?

Решение

Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с шестью командами и с семью не сыграла. Среди этих семи команд есть две, не сыгравшие пока между собой. Действительно, если среди этих семи команд нет двух, не сыгравших пока между собой, то все эти семь команд сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ матч. Однако за один тур эти семь команд могут провести между собой только 3 матча, а за 6 туров — $3\cdot 6 = 18$ матчей. Следовательно, среди этих семи команд есть две, пока не сыгравшие между собой, и вместе с рассмотренной они образуют три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

Ответ: Обязательно.

Комментарий

Эта задача оказалась наиболее сложной среди всех предложенных в конкурсе. Ее смогли решить только 10% участников. Большое количество решений основывались на том, что если разбить 14 команд на 2 группы по 7 команд и каждая команда сыграет со всеми в своей группе, то не найдутся 3 команды, не сыгравшие между собой. Но подобный пример не имеет место, так как в задаче сказано, что прошло 6 туров. При таком условии получается, что некоторые команды должны были сыграть оба матча в одном туре, что невозможно.