Волшебный сундучок

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор задач тестовой части заданий. Задания 6 – 10.

4 класс

1	2	3	4	5
А	В	Б	Г	Б

Задача №6 (3 балла)

Банка с мёдом весит 500 г, такая же банка с керосином весит 350 г. Керосин в два раза легче мёда. Сколько весит пустая банка?

А. 200 г. Б. 150 г. В. 125 г. Г. 100 г.

Решение

По условию, масса мёда в банке на 500 – 350 = 150 г больше массы керосина в такой же банке. Если массу керосина в банке принять за 1 часть, то масса мёда в такой же банке составит 2 части, так как керосин в два раза легче мёда. Следовательно, 150 г составляет 2 – 1 = 1 часть. Отсюда следует, что масса керосина равна 150 г, а масса пустой банки 350 – 150 = 200 г.

Ответ: А. 200 г.

Комментарий

С этой задачей справились 81% участников. Видимо остальные выбирали ответ наугад. Как видно из авторского решения, задача простая и не требовала никаких специальных знаний и навыков.

Задача №7 (3 балла)

В классе несколько человек стали собирать марки. Нина собрала вдвое больше марок, чем любой из остальных начинающих коллекционеров. Если Нина отдаст все свои марки Васе, то у Васи станет столько марок, сколько их у всех остальных начинающих коллекционеров вместе. Сколько одноклассников начали собирать марки?

А. 3. Б. 4. В. 5. Г. 6.

Решение

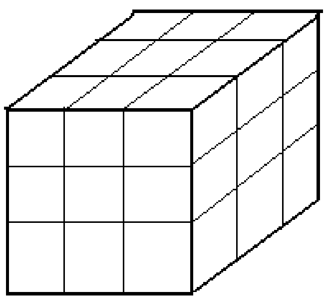
После получения марок от Нины у Васи стало марок втрое больше, чем у каждого из остальных одноклассников, начавших собирать марки, и у него их столько, сколько их у всех остальных вместе. У Нины не осталось ни одной марки. Следовательно, кроме Нины и Васи, в классе 3 человека начали собирать марки. А всего (с Васей и Ниной) — 5.

Ответ: В. 5.

Комментарий

С этим заданием справились две трети учеников. Многие выбрали вариант А. Видимо, они неправильно поняли вопрос и нашли количество коллекционеров без Васи и Нины.

Задача №8 (3 балла)



Куб, сложенный из одинаковых кубиков (см. рис.), начинают разбирать следующим образом: на каждом шаге все кубики, имеющие соседей, примыкающих к их противоположным граням, сохраняются, а остальные убираются. Через сколько шагов все кубики будут убраны?

А. Через 3 шага. Б. Через 4 шага. В. Через 5 шагов. Г. Через 6 шагов.

Решение

На первом шаге можно убрать только угловые кубики. На втором шаге — все кубики, примыкающие к граням большого куба, кроме тех, которые стоят в центрах граней. На третьем шаге убираются все кубики, кроме одного, того, который находился внутри куба. И, наконец, убирается этот кубик. Потребовалось 4 шага, чтобы все кубики будут убраны.

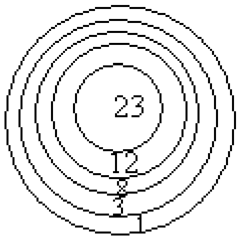
Ответ: Б. Через 4 шага.

Комментарий

Эта задача оказалась наиболее сложной для участников конкурса. Ее смогли решить только 27% учеников. В этой задаче очень важно правильное понимание условия и визуальное представление процесса. Можно попробовать рисовать фигуру, остающуюся после каждого шага, и проверять, все ли кубики убраны по описанному принципу. Также можно попробовать данный процесс на примере одной грани куба, это поможет понять принцип, по которому разбирается весь куб.

Задача №9 (3 балла)

Бросают три дротика в мишень, изображённую на рисунке. Очки, набранные за три броска, складываются, промах оценивается в 0 очков. Какой итоговый показатель, представленный в ответах, невозможно получить за 3 броска?



А. 14. Б. 18. В. 19. Г. 30.

Решение

Показатели 14, 18, 19 можно получить за 3 броска:

14 = 12 + 1 + 1; 18 = 12 + 3 + 3, 19 = 8 + 8 + 3.

Показатель 30 получить нельзя. Это проверяется перебором различных вариантов сумм трёх чисел, изображённых на мишени.

Ответ: Г. 30.

Комментарий

Девятую задачу смогли решить 91% учеников. Имея варианты ответа и зная, что правильный среди них должен быть только один, не трудно попробовать построить к ним примеры и понять какой.

Задача №10 (3 балла)

Известно, что у слона одна губа, один хобот, а у верблюда — две губы. Кого больше в зоопарке: слонов или двугорбых верблюдов и на сколько, если у них губ на 5 больше, чем горбов, а горбов в 4 раза больше, чем хоботов?

А. Слонов, на 5. Б. Двугорбых верблюдов, на 5.

В. Слонов, на 3. Г. Двугорбых верблюдов, на 3.

Решение

У слона одна губа. У верблюда две губы и два горба. Губ у перечисленных животных на 5 больше, чем горбов. Из этих условий следует, что слонов в зоопарке всего пять.

Так как у верблюда два горба, у слона один хобот, а горбов у перечисленных животных в четыре раза больше, чем хоботов, то верблюдов в зоопарке в 4:2 = 2 раза больше, чем слонов. Значит, в зоопарке 5*2=10 верблюдов.

Ответ: Б. Двугорбых верблюдов, на 5.

Комментарий

В этом задании правильный ответ указали 74% учеников. В задаче надо было в правильном порядке рассмотреть данные утверждения и сделать из них правильные выводы. Большинство с этим справились.

5 класс

1	2	3	4	5
Б	Г	Г	Б	В

<u>Задача №6 (3 балла)</u>

В записи семизначного номера телефона содержится восемь цифр: одна лишняя. Неизвестно, на каком месте она расположена. Сколько нужно сделать звонков, чтобы гарантированно восстановить номер, то есть убрать лишнюю цифру?

А. 6. Б. 7. В. 8. Г. 9.

Решение

Обозначим искомый номер $\overline{a_1a_2...a_7}$, где a_1, …, a_7 — цифры. Лишняя цифра может занимать любое из 8 мест. Вычёркивая поочерёдно цифры и звоня по полученному номеру, можно за 7 раз восстановить номер.

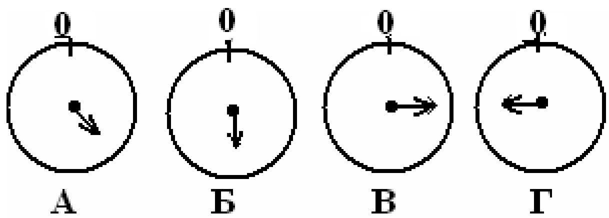
Ответ: Б. 7.

Комментарий

Только половина учеников смогли решить эту задачу. Судя по тому, что наиболее часто встречающийся среди неверных ответов был вариант В.8, многие просто не учли, что, проверив 7 номеров, корректность восьмого определяется однозначно. Либо правильный номер найден среди проверенных семи, либо это точно восьмой.

<u>Задача №7 (3 балла)</u>

В одной стране выпускают механические часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а не два, как в обычных механических часах. Где находится часовая стрелка в этих необычных часах в 6 часов вечера? Нулевое деление отмечает 24 часа в этих часах и 12 часов в обычных часах.



Решение

Так как до конца суток осталось 6 часов, что составляет четвёртую часть суток, то и на часах должна до нулевого деления оставаться четверть полного оборота. Следовательно, положение часовой стрелки изображено на рисунке **Г.**

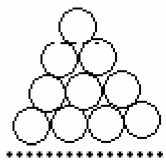
Ответ: Г.

Комментарий

Седьмое задание решили правильно 57% участников конкурса. Сложно предположить, почему этого не смогли остальные. Возможно, многие перепутали 6 часов вечера и 6 часов утра и выбрали ответ В. Надо внимательнее читать условие, чтобы не допускать подобных ошибок.

Задача №8 (3 балла)

Одинаковые монеты разложили в виде равностороннего треугольника, как показано на рисунке, так, что каждая сторона треугольника состоит из 63 монет. Сколько всего использовано монет?



А. 1953. Б. 1984. В. 1985. Г. 2016.

Решение

В верхнем ряду 1 монета, во 2-м — 2, в 3-м — 3, и т. д, 63 монеты в 63-м ряду. Поэтому искомое количество равно 1 + 2 + 3 + … + 63. Применяя переместительное и сочетательное свойства сложения, получим: (1 + 63) + (2 + 62) + (3 + 61) + … + (31 + 33) + 32. Сумма слагаемых в каждой скобке равна 64, таких сумм 31, поэтому искомая сумма равна: 64·31 + 32 = 1984 + 32 = 2016.

Ответ: Г. 2016.

Комментарий

С этой задачей справились 69% учеников. Остальные либо допустили ошибку в расчетах, либо выбрали ответ наугад. Есть одна простая формула, которая позволяет посчитать сумму чисел от 1 до N. Эта сумма равна N*(N+1)/2. Рекомендую ее запомнить. Она очень часто поможет сэкономить время и ограничить возможность ошибки в расчетах подобной суммы.

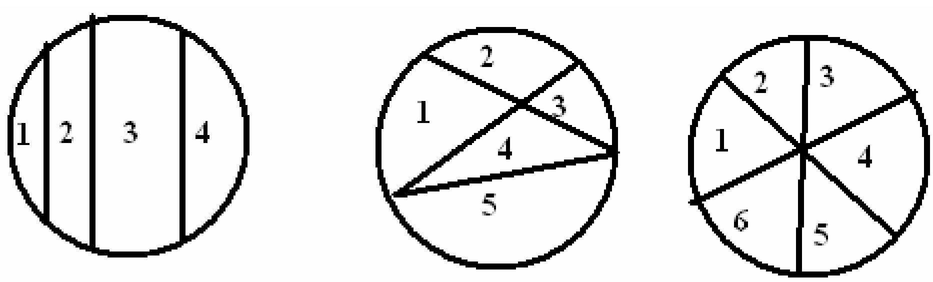
Задача №9 (3 балла)

Круглый торт разрезали с помощью трёх прямолинейных разрезов так, что на каждом куске оказалась ровно одна розочка. Сколько из натуральных чисел, меньших 7, могло быть количеством розочек на торте?

А. 2. Б. 3. В. 4. Г. 5.

Решение

Торт тремя прямолинейными разрезами можно разрезать на 4, 5, 6 частей (см. рисунок).



Так как первый прямолинейный разрез делит торт на две части, а каждый следующий делит хотя бы одну имеющуюся часть на две, то 3-х розочек не может быть. Тем более двух и одной.

Ответ: Б. 3.

Комментарий

Данная задача вызвала большие трудности у участников, связанные с пониманием условия. Вопрос «Сколько из чисел, меньших 7, могло быть количеством розочек на торте» большинство восприняло как «Какое из чисел, меньших 7, могло быть количеством розочек на торте». Важно понимать принципиальную разницу между такими постановками вопроса. В отличие от второго варианта вопроса, в первом вопросе спрашивается количество всевозможных вариантов ответа на второй вопрос. Правильный вариант ответа в этой задаче указали только 23% участников конкурса.

<u>Задача №10 (3 балла)</u>

Имеется сто билетов с номерами 00, 01, 02, …, 98, 99 и десять ящиков с номерами 0, 1, 2, …, 9. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика содержится в записи номера билета. Какое наименьшее количество билетов может оказаться в одном из ящиков после раскладывания всех билетов по указанному правилу?

А. Девять. Б. Два. В. Один. Г. Ни одного.

Решение

Билеты с номерами 00, 11, 22, …, 99 попадут при любом раскладывании в ящики с номерами 0, 1, 2, …, 9. Поэтому ни один из ящиков не может быть пустым при любом раскладывании билетов по указанному правилу.

Все билеты, кроме билета с номером 99, можно положить в ящики с номером, отличным от номера 9, так как их номера содержат цифру, отличную от 9. Следовательно, в ящике с номером 9 может оказаться один билет.

Ответ: В. Один.

Комментарий

С этим заданием справились 57% учеников. Здесь необходимо было понять два момента. Почему в каждом ящике обязательно будет хотя бы один билет и как остальные билеты можно разложить, не используя данный ящик. Многие не смогли этого сделать.

6 класс

1	2	3	4	5
Б	А	А	Г	Б

<u>Задача №6 (3 балла)</u>

В волейбольном турнире каждая команда встретилась с каждой по одному разу. Оказалось, что ровно 95 % команд одержали хотя бы по одной победе. В волейболе ничьих не бывает. Сколько команд участвовало в турнире?

А. 10. Б. 20. В. 24. Г. 36.

Решение

Если ровно 95 % команд одержали хотя бы по одной победе, то не одержали ни одной победы в турнире 5% команд. Но не одержать ни одной победы могла только одна команда, так как любые две команды играли между собой и ничьих в волейболе не бывает.

Следовательно, 5% от количества команд равно 1, в турнире участвовало $\frac{1\cdot 100}{5}=20$ команд.

Ответ: Б. 20.

Комментарий

Задача предельно простая. Раз ровно 95% команд одержали хотя бы одну победу, то 95% от общего числа команд должно быть целым числом. Легко убедиться в том, что среди предложенных вариантов ответа, только Б.20 при умножении на 0,95 дает целый результат. Эту задачу смогли решить 84% участников.

Задача №7 (3 балла)

За ужином Таня съела столько же пирожных, сколько и её дочка, а Маша в три раза больше, чем её дочка, причём каждый съел целое количество пирожных. Сколько пирожных съела Маша, если ужинало трое и было съедено 14 пирожных?

А. 6. Б. 7. В. 8. Г. 9.

Решение

Из условия следует, что Таня и Маша — родственники: одна из них является мамой другой, третья сидящая за ужином — дочка одной из них и внучка другой.

Если Таня — мама, то Маша — дочка. Тогда Таня и Маша съели вместе в 3 + 3 = 6 раз больше пирожных, чем дочка Маши. Примем количество пирожных, съеденных дочкой Маши, за 1 часть, тогда количество пирожных, съеденных Таней и Машей вместе, составляет 6 частей. Общее количество съеденных пирожных составляют 6 + 1 = 7 частей. На одну часть приходится 14:7 = 2 пирожных, Маша съела 2·3 = 6 пирожных.

Если Маша — мама, то Таня — дочка. Тогда Маша съела пирожных в три раза больше, чем её дочка и в три раза больше, чем её внучка. Примем количество пирожных, съеденных Таней, за 1 часть, тогда количество пирожных, съеденных её дочкой, также составляет 1 часть, а количество пирожных, съеденных Машей, — 3 части. Тогда общее количество съеденных пирожных составляет 1 + 1 + 3 = 5 частей. Так как число 14 на 5 не делится, то в этом случае высказанное предположение неверно.

Следовательно, Таня — мама, Маша — дочка, Маша съела 6 пирожных.

Ответ: А. 6.

Комментарий

В этой задаче правильный ответ указали 75% участников. В этой задаче необходимо было понять, что в условии существует два различных варианта. Либо Маша дочка Тани и третья, сидящая за ужином – дочка Маши, либо Таня дочка Маши и третья, сидящая за ужином – дочка Тани. После чего составить линейное уравнение с одной неизвестной для каждого из двух вариантов. Решить уравнения и выбрать из них тот ответ, который является целым числом.

Задача №8 (3 балла)

В некотором летнем месяце сред больше, чем четвергов, а вторников больше, чем понедельников. Какой это месяц?

А. Июнь. Б. Июль. В. Август. Г. Определить нельзя.

Решение

Если в месяце 31 день, то в 4 неделях (в течение 28 дней) одинаковое количество дней недели. По условию, в оставшиеся три дня сред больше, чем четвергов, то есть в этом месяце 4 четверга, 5 сред, а значит, 5 понедельников и 5 вторников. Это противоречит тому, что вторников больше, чем понедельников. Следовательно, в рассматриваемом месяце 30 дней, и это июнь, так как июль и август содержат по 31 дню.

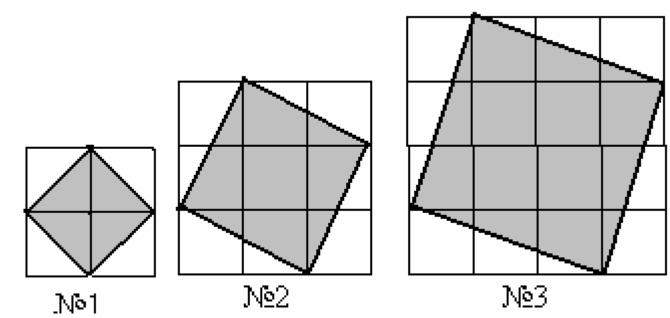
Ответ: А. Июнь.

Комментарий

Эта задача оказалась наиболее сложной из всех предложенных. Ее смогли решить только 26% участников. На самом деле, решение задачи довольно простое. Раз в месяце вторников больше чем понедельников, то очевидно, что месяц начинается со вторника, иначе перед каждым вторником месяца есть понедельник и вторников будет не больше чем понедельников. А так как сред больше чем четвергов, то из тех же соображений, последний день месяца будет среда. Из этих двух утверждений легко получить, что в месяце 30 дней, а значит это июнь.

<u>Задача №9 (3 балла)</u>

На рисунке на клеточной бумаге с клетками одинаковых размеров изображены закрашенные фигуры, площади которых превосходят площадь одной клетки на фигуре 1 в 2 раза, на фигуре 2 в 5 раз, на фигуре 3 в 10 раз. Во сколько раз превосходит площадь одной клетки площадь 10-й закрашенной фигуры, построенной по тому же правилу, что и фигуры 1, 2, 3?



А. В 170 раз. Б. В 145 раз. В. В 122 раза. Г. В 101 раз.

Решение

Площадь закрашенной фигуры на каждом рисунке равна разности площади большого квадрата, состоящего из клеток, и содержащего закрашенную фигуру, и суммы площадей 4-х равных прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами закрашенной фигуры. Из двух таких прямоугольных треугольников можно составить прямоугольник, состоящий из клеток, количество которых равно номеру фигуры.

Обозначим через k номер фигуры. Если принять площадь одной клетки за единицу площади, то, учитывая, что длина стороны квадрата выражается числом, на 1 превосходящим номер фигуры, получим, что площадь S_k закрашенной фигуры с номером k равна $(k + 1)^2 – 2k$. Из этого выражения следует, что $S_{10} = (10 + 1)^2 – 20 = 101$.

Ответ: Г. В 101 раз.

Комментарий

В этом задании правильный ответ выбрали 74% учеников. Важно понимать, что считать подобную площадь удобнее как разность площадей большого квадрата (всей сетки) и четырех треугольных сегментов, площадь которых также легко находятся. Такой прием бывает часто очень полезен в задачах, где требуется найти площадь части фигуры или площадь какой-либо нестандартной фигуры.

Задача №10 (3 балла)

Имеется сто билетов с номерами 00, 01, 02, …, 98, 99 и десять ящиков с номерами 0, 1, 2, …, 9. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика содержится в записи номера билета. Какое наибольшее количество билетов может оказаться в одном из ящиков после раскладывания всех билетов по указанному правилу?

А. 20. Б. 19. В. 11. Г. 10.

Решение

Количество всех двузначных номеров билетов, содержащих данную цифру в записи номера билета, равно 19: десять номеров содержат эту цифру первой, десять — второй, но при этом номер, запись которого содержит только эту цифру, учтён дважды.

Ответ: Б. 19.

Комментарий

Это задание правильно решили 60% учеников. Большинство неверных ответов были вариантом А.20. Видимо при подсчете всех билетов, которые могут попасть в ящик с номером Х (аналогично тому, как это сделано в авторском решении), ученики не учли, что билет с номером ХХ посчитан дважды.

7 класс

1	2	3	4	5
В	В	Б	В	Г

Задача №6 (3 балла)

В коробке 100 жетонов, отличающихся лишь цветом: 20 красных, 20 жёлтых, 20 зелёных, 20 синих, остальные — чёрные и белые. Какое наименьшее количество жетонов нужно взять, не глядя, из коробки, чтобы среди них обязательно оказалось не менее десяти жетонов одного цвета?

А. 40. Б. 47. В. 55. Г. 61.

Решение

Если в коробке было 10 чёрных и 10 белых жетонов, то, взяв по 9 жетонов каждого цвета, получим 54 жетона, среди которых не будет 10 жетонов одного цвета. Следовательно, искомое число больше 54.

Если взять 55 жетонов, то среди них обязательно окажется 10 жетонов одного цвета. Если окажется, что красных, жёлтых, зелёных и синих жетонов взято менее 10 каждого цвета, то среди не менее $55 - 4 \cdot 9 = 19$ жетонов найдётся или 10 чёрных, или 10 белых.

Ответ: В. 55.

Комментарий

Задачи на «принцип Дирихле» довольно часто попадаются на математических олимпиадах. Если вы не знаете, что это такое, то рекомендую ознакомиться с ним и решить несколько задач на эту тему в качестве самостоятельной работы. Судя по тому, что с задачей справились только 60% учеников, многим это не помешает.

Задача №7 (3 балла)

За ужином Таня съела столько же пирожных, сколько и её дочка, а Маша в три раза больше, чем её дочка, причём каждая съела целое количество пирожных. Сколько пирожных съела Маша, если ужинало трое, и было съедено 15 пирожных?

А. 3. Б. 6. В. 9. Г. Определить нельзя.

Решение

Из условия следует, что Таня и Маша — родственники: одна из них является мамой другой, третья сидящая за ужином — дочка одной из них и внучка другой.

Если Таня — мама, то Маша — дочка. Тогда Таня и Маша съели вместе в 3 + 3 = 6 раз больше пирожных, чем дочка Маши. Примем количество пирожных, съеденных дочкой Маши, за 1 часть, тогда количество пирожных, съеденных Таней и Машей вместе, составляет 6 частей. Общее количество съеденных пирожных составляют 6 + 1 = 7 частей. Так как число 15 на 7 не делится, то в этом случае высказанное предположение неверно.

Если Маша — мама, то Таня — дочка. Тогда Маша съела пирожных в три раза больше, чем её дочка и в три раза больше, чем её внучка. Примем количество пирожных, съеденных Таней, за 1 часть, тогда количество пирожных, съеденных её дочкой, также составляет 1 часть, а количество пирожных, съеденных Машей, — 3 части. Тогда общее количество съеденных пирожных составляет 1 + 1 + 3 = 5 частей. На 1 часть приходится 15:5 = 3 пирожных, Маша съела 3·3 = 9 пирожных.

Ответ: В. 9.

Комментарий

В этой задаче правильный ответ указали 69% участников. В этой задаче необходимо было понять, что в условии существует два различных варианта. Либо Маша дочка Тани и третья, сидящая за ужином – дочка Маши, либо Таня дочка Маши и третья, сидящая за ужином – дочка Тани. После чего составить линейное уравнение с одной неизвестной для каждого из двух вариантов. Решить уравнения и выбрать из них тот ответ, который является целым числом.

<u>Задача №8 (3 балла)</u>

В некотором месяце сред больше, чем четвергов, а вторников больше, чем понедельников. Какой день недели 13-го числа этого месяца?

А. Суббота. Б. Воскресенье. В. Четверг. Г. Пятница.

Решение

В месяце 30 дней. В противном случае или сред столько же, сколько четвергов, или понедельников столько же, сколько вторников.

Так как в течение 28 дней количество всех дней недели одинаковое (по 4), то оставшиеся два дня — вторник и среда.

Если месяц начинается не со вторника, то последний день или не вторник, или не среда, следовательно, условие нарушается.

Если же месяц начинается со вторника, то в нём 29-го числа вторник, 30-го — среда, то есть условие выполняется.

В этом месяце 13-го числа воскресенье.

Ответ: Б. Воскресенье.

Комментарий

Данное задание оказалось самым простым из предложенных задач. С ним справились 84% учеников. На самом деле для решения этой задачи достаточно условия о том, что вторников больше чем понедельников. Из него следует, что месяц начинается со вторника, а значит, 13-ого числа будет воскресенье.

<u>Задача №9 (3 балла)</u>

Десять человек сдавали экзамен. Они вытягивали билеты наугад по очереди по одному из 10 билетов, лежащих на столе, причём каждый вытягивал билет из оставшихся. Один из экзаменующихся знал ответы ко всем 10 билетам, один — к билетам № 1, 2, …, 9, один — к билетам 1, 2, …, 8, и т. д., один только к билету №1. Какое наибольшее количество экзаменующихся могли вытянуть билет, ответ на который они не знали?

А. 5. Б. 6. В. 9. Г. 10.

Решение

Обозначим экзаменующегося, знающего ответы на k билетов, через k, k = 1, 2, …, 10. Найдём искомое количество. Оно не может равняться 10, так как один знает все ответы. А 9 может. Например, первым билет №2 берёт учащийся 1, затем учащийся 2 берёт билет №3, далее учащийся 3 берёт билет №4, потом учащийся 4 берёт билет №5 и т. д. и, наконец, учащийся 9 берёт билет №10. Перечисленные учащиеся ответы на взятые билеты не знают. После этого учащемуся 10 остался билет №1, ответ на который он знает. Следовательно, наибольшее количество экзаменующихся могло вытянуть билет, ответ на который они не знали, равно 9.

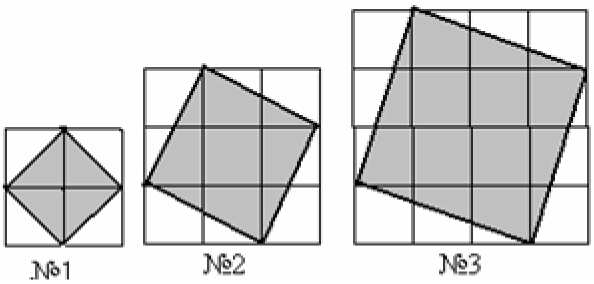
Ответ: В. 9.

Комментарий

С этой задачей справились только 69% участников. Очевидно, что ответ 10 не подходит, так как один человек знает ответы на все билеты. Необходимо было построить пример для 9. Почти треть учеников не смогли этого сделать и выбрали ответ наугад.

<u>Задача №10 (3 балла)</u>

На рисунке на клеточной бумаге с клетками одинаковых размеров изображены закрашенные фигуры, площади которых превосходят площадь одной клетки на фигуре 1 в 2 раза, на фигуре 2 в 5 раз, на фигуре 3 в 10 раз. Во сколько раз превосходит площадь одной клетки площадь 100-й закрашенной фигуры, построенной по тому же правилу, что и фигуры 1, 2, 3?



А. В 730 раз. Б. В 1 001 раз. В. В 5 626 раз. Г. В 10 001 раз.

Решение

Площадь закрашенной фигуры на каждом рисунке равна разности площади большого квадрата, состоящего из клеток и содержащего закрашенный квадрат, и суммы площадей 4-х равных прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами закрашенной фигуры. Из двух таких прямоугольных треугольников можно составить прямоугольник, состоящий из клеток, количество которых равно номеру фигуры.

Обозначим через k номер фигуры. Если принять площадь одной клетки за единицу площади, то, учитывая, что длина стороны квадрата выражается числом, на 1 превосходящим номер фигуры, получим, что площадь S_k закрашенной фигуры с номером k равна $(k + 1)^2 – 2k$. Из этого выражения следует, что $S_{100} = (100 + 1)^2 – 200 = 10\ 001$.

Ответ: Г. В 10 001 раз.

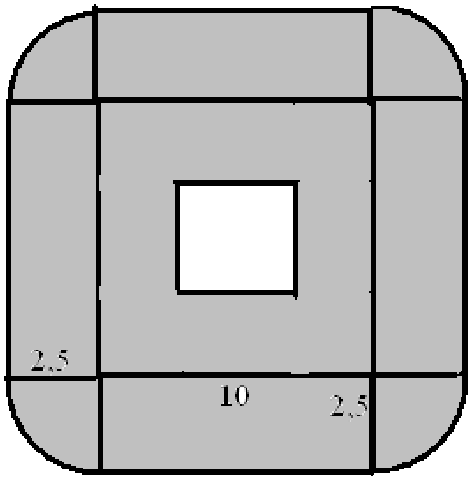
Комментарий

В этом задании правильный ответ выбрали 58% учеников. Важно понимать, что считать подобную площадь удобнее как разность площадей большого квадрата (всей сетки) и четырех треугольных сегментов, площадь которых также легко находятся. Такой прием бывает часто очень полезен в задачах, где требуется найти площадь части фигуры или площадь какой-либо нестандартной фигуры.

8 класс

1	2	3	4	5
В	Б	В	А	В

Задача №6 (3 балла)



Круг радиуса 2,5 см перемещается по столу так, что его центр обходит контур квадрата со стороной 10 см. Найдите площадь части стола, образованной следом круга. Выберите из приведенных в ответах наиболее точное значение.

А. 225 см^2. Б. 201 см^2. В. 195 см^2. Г. 190 см^2.

Решение

Изобразим множество точек, являющихся объединением кругов радиусов 2,5 см с центрами в точках контура квадрата со стороной 10 см (см. рисунок). Полученная фигура состоит из 4-х прямоугольников $10\times2{,}5$, 4-х четвертей круга радиуса 2,5 см и квадрата 10 см$\times$10 см с вырезанным квадратом 5 см$\times$5 см. Её площадь равна $4\cdot10\cdot2{,}5 + \pi\cdot2{,}5^2 + 10^2 - 5^2 \approx 195$ см^2.

Ответ: В. 195 см^2.

Комментарий

С шестым заданием справились менее трети учеников, всего 31%. В подобных задачах очень важен правильный рисунок. После его построения, необходимо разбить полученную область на части, площади которых легко считаются. Далее решение не составит труда, конечно же, если вы знаете формулы нахождения площадей простых фигур.

Задача №7 (3 балла)

Вы прошли мимо дома, номер которого равен $2n+1$ (нечётная сторона улицы). Мимо скольких домов по этой стороне улицы ещё нужно пройти, чтобы дойти до дома, номер которого в 5 раз больше?

А. $4n+2$. Б. $4n+1$. В. $4n$. Г. $4n-1$.

Решение

Номер дома, до которого нужно пройти, равен $10n + 5$. Количество нечётных чисел между числами $10n + 5$ и $2n + 1$ равно $((10n + 3) - (2n + 1)) : 2 = 4n + 1$. Это и есть искомое количество.

Ответ: Б. $4n + 1$.

Комментарий

С данной задачей справились 72% участников. На мой взгляд, эта задача самая простая из всех предложенных. Наиболее распространенным среди неправильных ответов был вариант А. И получался он скорее всего из таких рассуждений:
2n+1+2(2n+2)=10n+5, то есть в 5 раз больше чем 2n+1. Но важно понимать, один момент. Рассмотрим на простом примере n=0. Пройдя мимо первого дома, чтобы дойти до пятого,

нужно пройти мимо только третий, то есть один дом, а не два. В задачах с параметром, проверка полученного ответа на простом примере очень часто поможет вам избежать подобных ошибок. Не забывайте об этом.

Задача №8 (3 балла)

Каков трёхзначный номер комнаты в гостинице, если он совпадает с половиной суммы всех шести двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера?

А. 182. Б. 298. В. 198. Г. 188.

Решение

Обозначим номер комнаты через $\overline{abc}$, где a — цифра сотен, b — цифра десятков, c — цифра единиц. Из условия следует равенство

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = \frac{1}{2}\left(\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(10a + b + 10b + a + 10a + c + 10c + a + 10b + c + 10c + b\right) = 11(a + b + c).$$

Следовательно, $89a = 10c + b$ или $89a = \overline{cb}$. Так как число $\overline{cb}$ двузначное, то $a = 1$. Тогда $\overline{bc} = 98$. Искомый номер 198.

Ответ: В. 198.

Комментарий

С этим заданием справились 86% участников. Задача оказалась из числа наиболее простых. Хотя решение у нее и не самое очевидное, но имея варианты ответа и немного времени в запасе, не сложно просто проверить их все.

Задача №9 (3 балла)

Двое играют в шахматы с часами, включая часы, когда приходит очередь делать ход, и выключая после сделанного хода. После того, как они сделали по 35 ходов, часы каждого игрока показывали 2 часа 30 минут. Какое из приведенных чисел не могло быть наибольшим значением разности показаний часов игроков в начале каждого из 70 ходов?

А. 2 мин. Б. 5 мин. В. 1 час. Г. 2 часа.

Решение

Если указанная в условии разность равна 2 мин., то на один ход каждый тратил не более 4 минут. Действительно, в начале хода могло быть на 2 минуты меньше, чем у соперника, и не более 2 минут ушло на опережение часов соперника. Тогда за 70 ходов потрачено не более 280 минут. А по условию, прошло 5 часов или 300 минут.

Все остальные числа могут быть значениями разности показаний часов игроков в начале некоторого хода. Действительно, пусть, например, начинающий партию над первым ходом думал 5 мин., а над остальными 34-ю ходами — по 2ч 25 мин.: 34 = 145 мин.: 34 $\approx$ 4,27 мин; второй игрок над каждым ходом думал по 2ч 30 мин : 35 = 150 мин : 35 $\approx$ 4,28 мин. То есть перед первым ходом второго игрока 5 мин могли быть наибольшими значениями разности показаний часов игроков. Аналогично это показывается для 1 ч и для 2 ч.

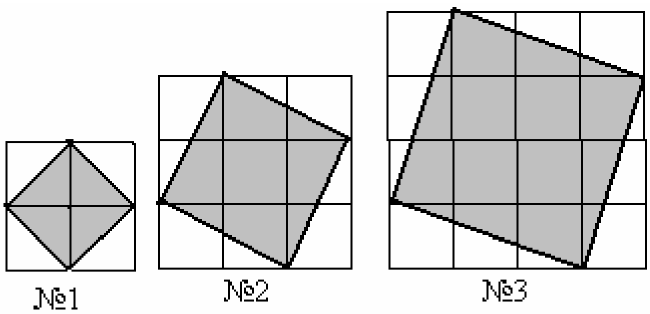
Ответ: А. 2 мин.

Комментарий

Это задание оказалось наиболее сложным. С ним справились только 22% участников. Возможно, это связано с тем, что само условие задачи тяжеловато для понимания и многие просто не захотели разбираться, и выбрали ответ наугад. Решение же в свою очередь не такое уж и сложное. Примеры для вариантов Б, В и Г строятся довольно просто. Если у вас возникают трудности с пониманием условия, не стесняйтесь задавать свои уточняющие вопросы. Задача со сложным условием не всегда сложна для решения.

Задача №10 (3 балла)

На рисунке на клеточной бумаге с клетками одинаковых размеров изображены закрашенные фигуры, площади которых превосходят площадь одной клетки на фигуре 1 в 2 раза, на фигуре 2 в 5 раз, на фигуре 3 в 10 раз. Во сколько раз превосходит площадь одной клетки площадь закрашенного квадрата на фигуре с номером *n*, построенной по тому же правилу, что и фигуры 1, 2, 3?



А. В $n^2 - n$ раз. Б. В $n^2 + n$ раз. В. В $n^2 + 1$ раз. Г. В $n^2 - 1$ раз.

Решение

Площадь закрашенного квадрата на каждом рисунке равна разности площади большого квадрата, состоящего из клеток и содержащего закрашенный квадрат, и суммы площадей 4-х равных прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами закрашенной фигуры. Из двух таких прямоугольных треугольников можно составить прямоугольник, состоящий из клеток, количество которых равно номеру фигуры.

Если принять площадь одной клетки за единицу площади, то, учитывая, что длина стороны квадрата выражается числом, на 1 превосходящим номер фигуры, получим, что площадь S_n закрашенной фигуры с номером *n* равна $(n + 1)^2 - 2n = n^2 + 1$. Следовательно, искомое отношение равно $n^2 + 1$.

Ответ: В. В $n^2 + 1$ раз.

Комментарий

В этом задании правильный ответ выбрали 62% учеников. Важно понимать, что считать подобную площадь удобнее как разность площадей большого квадрата (всей сетки) и четырех треугольных сегментов, площадь которых также легко находятся. Такой прием бывает часто очень полезен в задачах, где требуется найти площадь части фигуры или площадь какой-либо нестандартной фигуры.

9 класс

1	2	3	4	5
В	Г	Б	В	Б

Задача №6 (3 балла)

В параллели 9-х классов мальчиков больше 34%, но меньше 35%. Сколько из чисел 50, 60, 98, 100, 101, 123 могут быть количеством учащихся в параллели?

А. 1. Б. 2. В. 3. Г. 4.

Решение

Обозначим количество учащихся в параллели через x, а количество мальчиков в ней через m. По условию, выполняются неравенства $0{,}34x < m < 0{,}35x$. Следовательно, некоторое число x может быть количеством учащихся в параллели, если существует натуральное число, большее $0{,}34x$ и меньшее $0{,}35x$. Среди указанных чисел только три числа обладают этим свойством:

$98\cdot 0{,}34 = 33{,}32 < 34 < 34{,}3 = 98\cdot 0{,}35$

$101\cdot 0{,}34 = 34{,}34 < 35 < 35{,}35 = 101\cdot 0{,}35$;

$123\cdot 0{,}34 = 41{,}82 < 42 < 43{,}05 = 123\cdot 0{,}35$.

Ответ: В. 3.

Комментарий

Среди всех тестовых заданий, за эту задачу получили баллы меньше всего участников. Их количество составило 37%. Что довольно странно, так как задача не требовала никаких особых знаний и навыков. Нужно было просто перебрать предложенные шесть вариантов и посчитать сколько из них подходят.

Задача №7 (3 балла)

У Васи и Пети по 12 монет достоинствами 1 руб., 2 руб., 5 руб. у каждого. Сумма денег у Васи в два раза больше, чем у Пети. Сколько денег у Пети, если монет по 2 руб. у него столько, сколько у Васи по 5 руб., а монет по 5 руб. столько, сколько у Васи по 1 руб.?

А. 50 руб. Б. 48 руб. В. 24 руб. Г. 25 руб.

Решение

Обозначим через a, b, c количества монет достоинством соответственно по 1 руб., 2 руб., 5 руб. у Васи.

Тогда, по условию, у Пети b, c, a монет достоинством соответственно по 1 руб., 2 руб., 5 руб. Сумма денег у Васи равна $a + 2b + 5c$ (руб.), а у Пети — $b + 2c + 5a$ (руб.).

Из условия следует равенство:

$a + 2b + 5c = 2b + 4c + 10a$ или $c = 9a$. Так как $a \neq 0$ и $a + b + c = 12$, то $a = 1$, $c = 9$, $b = 2$. У Пети $2\cdot 1 + 9\cdot 2 + 1\cdot 5 = 25$ руб.

Ответ: Г. 25 руб.

Комментарий

В этом задании правильный вариант ответа выбрали чуть больше половины участников (59%). Стандартная задача на составление системы уравнений с несколькими неизвестными. Подобные задания встречаются практически везде и их просто необходимо уметь решать. Сложно сказать, где именно могли ошибаться участники в процессе решения этой задачи, но с уверенность можно сказать, что они не проверили свои ответы. Проверить ответ в подобной задаче дело одной минуты, не стоит об этом забывать.

Задача №8 (3 балла)

Экзамен сдавали 13 студентов. Экзаменатор перед началом экзамена рассадил их за круглым столом и попросил назвать тех, кто, по их мнению, сдаст экзамен. Каждый из них о себе и двух своих соседях промолчал, а обо всех остальных написал: «Никто из этих 10 человек экзамена не сдаст». Все сдавшие экзамен сказали правду, а все остальные ошиблись. Сколько учащихся из экзаменующихся сдали экзамен?

А. Один. Б. Два. В. Три. Г. Определить невозможно.

Решение

Пронумеруем учеников по часовой стрелке от №1 до №13. Предположим, что никто не сдал экзамен. Тогда высказывание каждого ученика истинно. Но правду сказали все сдавшие экзамен и только они. Следовательно, все ученики сдали экзамен. Получили противоречие.

Отсюда вытекает, что хотя бы один из учеников сдал экзамен. Пусть это будет ученик №1. Он сказал правду. Поэтому ученики, номера которых 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 11 и 12 экзамен не сдали. Кроме №1, экзамен могли сдать №2 и №13. Если экзамен сдал №2, то он сказал правду и экзамен не мог сдать №13: Никто из этих 10 человек экзамена не сдаст. Аналогично, если экзамен сдал №13, то он сказал правду и экзамен не мог сдать №2. таким образом только один из учеников №2 и №13 мог сдать экзамен. Следовательно, экзамен сдали два ученика.

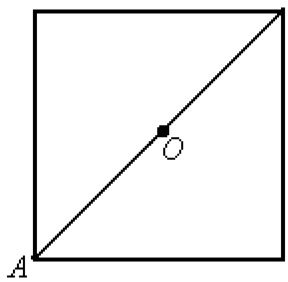
Ответ: Б. Два.

Комментарий

С этим заданием справились всего 38% участников. Задача не самая стандартная и требовала некоторых рассуждении. Не сразу понятно, как ее решать, но очевидно, что стоит начать с построения примера. Взять одного из студентов, предположить, что он ответил так-то и посмотреть, что из этого выйдет. После чего взять второго и т.д. В подобных задачах зачастую решение находится именно таким методом.

Задача №9 (3 балла)

В углах квадратного участка 20 м $\times$ 20 м стоят распылители воды. Орошаемая каждым распылителем часть поверхности земли имеет форму круга, центром которого является основание распылителя. Радиусы орошаемых кругов равны, так как регулируются одним краном. Каково наименьшее значение этого радиуса из приведенных в ответах, если участок полит весь?



А. 13 м. Б. 14 м. В. 15 м. Г. 16 м.

Решение

Изобразим участок квадратом со стороной 20 м. Участок будет полит, если его центр будет принадлежать орошаемым кругам.

Наименьший радиус круга с центром в вершине квадрата и содержащего центр квадрата равен половине диагонали квадрата, то есть $\frac{20\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$ м. Так как $14<10\sqrt{2}<15$ и должен быть полит весь участок, то искомый ответ— 15 м.

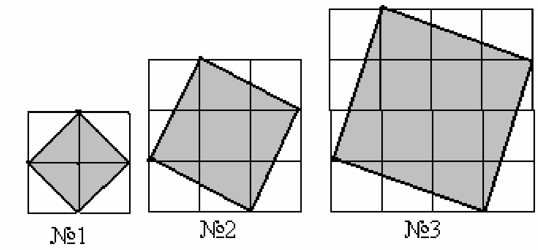
Ответ: В. 15 м.

Комментарий

Эту задачу решила почти половина участников (48%). Что довольно странно, учитывая, что задача не требовала никаких особых знаний кроме теоремы Пифагора. Возможно, многие просто не разобрались в условии и выбрали ответ наугад.

Задача №10 (3 балла)

На рисунке на клеточной бумаге с клетками одинаковых размеров изображены закрашенные фигуры, площади которых превосходят площадь одной клетки на фигуре 1 в 2 раза, на фигуре 2 в 5 раз, на фигуре 3 в 10 раз. Найдите номер фигуры, изображённой по тому же правилу, что и фигуры 1, 2, 3, на которой площадь закрашенного квадрата превосходит площадь одной клетки в 5185 раз?



А. 71. Б. 72. В. 73. Г. 74.

Решение

Площадь закрашенного квадрата на каждом рисунке равна разности площади большого квадрата, состоящего из клеток и содержащего закрашенный квадрат, и суммы площадей 4-х равных прямоугольных треугольников, отсекаемых сторонами закрашенной фигуры. Из двух таких прямоугольных треугольников можно составить прямоугольник, состоящий из клеток, количество которых равно номеру фигуры.

Обозначим через *n* номер фигуры. Если принять площадь одной клетки за единицу площади, то, учитывая, что длина стороны квадрата выражается числом, на 1 превосходящим номер фигуры, получим, что площадь S_n закрашенной фигуры с номером *n* равна $(n + 1)^2 – 2n = n^2 + 1$. Имеем уравнение $n^2 + 1 = 5185$, $n^2 = 5184$, $n = \pm 72$. Следовательно, искомый номер равен 72.

Ответ: Б. 72.

Комментарий

В этом задании правильный ответ выбрали 60% учеников. В задаче требовалось найти номер фигуры, на которой указанный квадрат будет иметь площадь 5185. Важно понимать, что считать подобную площадь удобнее как разность площадей большого квадрата (всей сетки) и четырех треугольных сегментов, площадь которых также легко находятся. Такой прием бывает часто очень полезен в задачах, где требуется найти площадь части фигуры или площадь какой-либо нестандартной фигуры.