



Волшебный сундучок

Всероссийский математический конкурс



Разбор задач третьей части заданий

4-5 класс

Задача №1

Из числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вновь вычли сумму его (полученного числа) цифр, и так делали снова и снова. После четырех таких вычитаний впервые получился нуль. Найти все такие числа. В ответе указать все возможные варианты в порядке возрастания, записав их через запятую. Докажите, что других нет.

Решение

Любое число минус сумма его цифр в десятичной записи делится на 9. Любое число, в котором более одной цифры больше суммы своих цифр. Поэтому перед четвертым вычитанием получилось число 9. Число 9 может получиться только из двухзначного числа. Причем это число делится на 9. А если двухзначное число делится на 9, то сумма его цифр тоже 9 или это число 99. Легко заметить, что число 99 не удовлетворяет условию задачи. Поэтому после второго вычитания получилось число 18 ($9+9$). А после первого – 27 ($18+9$). Видно, что подходят только числа от 30 до 39. Ответ: все числа от 30 до 39.

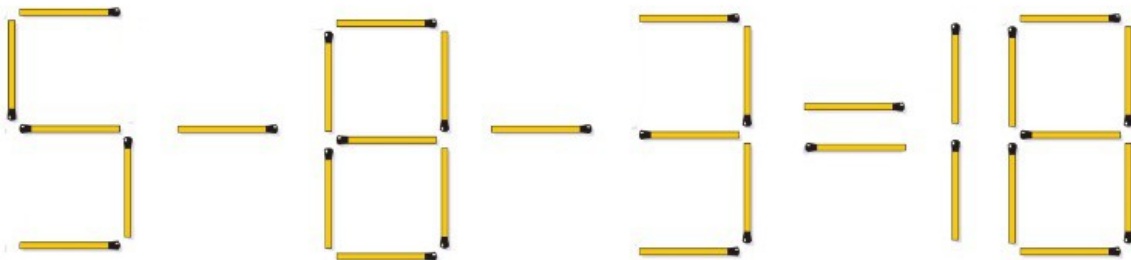
Ответ: 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

Комментарий

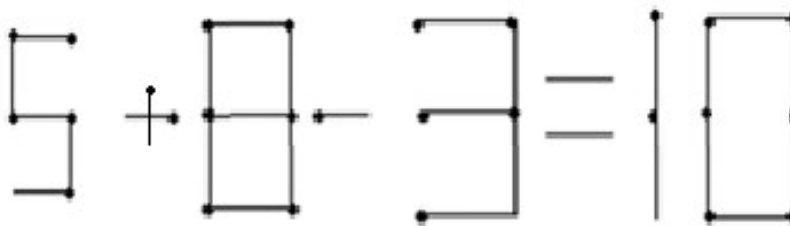
Большинство школьников получили верный ответ, но не смогли его полностью обосновать. Чаще всего в качестве обоснования участники рассматривали числа 29 и 40, для которых требовалось меньше 4-х и больше 4-х операций соответственно, откуда делался вывод, что все числа меньше 30 и больше 39 не подходят. Это действительно так, но делать вывод для всех чисел на основании конкретных примеров нельзя, поэтому такие решения засчитывались, как не полностью верные.

Задача №2

Нужно переложить одну спичку так, чтобы равенство стало верным:



Решение



Комментарий

С этой задачей справились практически все школьники.

Задача №3

Четыре спортсмена, Антон, Николай, Алексей и Кирилл, заняли первые четыре места в соревновании по легкой атлетике, причем ни одно место не было разделено между двумя спортсменами.. На вопрос, какое место занял каждый из них, трое болельщиков ответили:

1 – й: «Антон – второе место, Кирилл – третье ».

2 – й: «Антон – первое место, Николай – второе место».

3 – й: «Алексей – второе место, Кирилл – четвертое место».

Оказалось, что каждый болельщик ошибся ровно один раз. Кто занял четвертое место?

Решение

Рассмотрим высказывание 3-го болельщика. Предположим, что Кирилл занял 4-ое место, тогда 2-ое место занял Антон так как, первый болельщик ошибся в том, что Кирилл занял 3-е место. С другой стороны Николай не мог быть 2-ым, значит, из высказывания второго болельщика следует, что Антон занял 1-ое место, но он не может быть одновременно и 1-ым и 2-ым. Значит, Кирилл не занял 4-ое место, отсюда Алексей занял 2-ое место. Значит, Николай не может быть 2-ым, отсюда Антон первый из высказывания 2-го болельщика, значит Антон не занимал 2-го места, отсюда из высказывания первого болельщика Кирилл занял 3-е место. А это значит, что 4-ое место занял Николай.

Ответ: Николай.

Комментарий

Большинство учеников привели полное решение, но встречались работы, в которых приводилось только какие утверждения верные, а какие нет, а вариант, что верными могут быть другие утверждения не рассматривался. В таких работах был получен верный ответ, но доказательство считалось не полным. В этой и подобных задачах необходимо не только приводить ответ, который удовлетворяет всем условиям, но и доказывать, почему никакой другой ответ не подходит.

Задача №4

Четверо владельцев автомобилей решили провести гонки из четырех заездов, при этом меняясь в каждом заезде автомобилями. В результате каждый из владельцев проехал на каждом автомобиле.

- ◆ В первом заезде Дмитрий был на автомобиле Василия, а во втором Василий - на автомобиле Евгения.
- ◆ Николай выиграл третий заезд на своем автомобиле «Москвич», причем он выиграл и все остальные заезды.
- ◆ На «Камазе» во втором заезде ехал Евгений, а в четвертом заезде ехал Дмитрий.
- ◆ В четвертом заезде автомобиль «Камаз» пришел вторым после «Волги». Кому принадлежит автомобиль «Форд Фокус»?

Решение

Из 4-го условия Николай ехал на Волге в 4-ом заезде и выиграл его, а Дмитрий занял второе место на Камазе. В первых 2х заездах Николай был на Форде и на Камазе, но во втором он не мог ехать на Камазе, так как на нем ехал Евгений, значит в 1-ом заезде Николай ехал на Камазе, а во втором на Форде. Автомобиль Евгения не Камаз и не Форд, так как во втором заезде на автомобиле Евгения ехал Василий, а Евгений и Николай ехали на Камазе и на Форде соответственно. Так же Москвич не является автомобилем Евгения, так как Москвич машина Николая. Значит автомобиль Евгения – Волга. Значит автомобиль Василия либо Камаз либо Форд. Так как Дмитрий ехал в 4-ом заезде на Камазе, а в первом на автомобиле Василия, то автомобиль Василия – не Камаз. Значит автомобиль Василия – Форд.

Ответ: Василию.

Комментарий

Многие участники получили верный ответ, но далеко не все смогли привести полное решение. Часто был пропущен целый кусок обоснования. Скорее всего в уме школьники проделали все необходимые логические шаги, поэтому смогли верно заполнить таблицу, кто и на какой машине ехал в каждом из заездов, но посчитали не нужным приводить в работе длинные пояснения, почему таблица заполнялась именно так и никак иначе. К сожалению, такие решения жюри засчитывало как неполные, потому что в работе должны в письменном виде присутствовать обоснования всех фактов, на основании которых получен ответ, если эти факты не являются общеизвестными.

6-7 класс

Задача №1

Из числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вновь вычли сумму его (полученного числа) цифр, и так делали снова и снова. После четырех таких вычитаний впервые получился нуль. Найти все такие числа. В ответе указать все возможные варианты в порядке возрастания, записав их через запятую. Докажите, что других нет.

Решение

Любое число минус сумма его цифр в десятичной записи делится на 9. Любое число, в котором более одной цифры больше суммы своих цифр. Поэтому перед четвертым вычитанием получилось число 9. Число 9 может получиться только из двухзначного числа. Причем это число делится на 9. А если двухзначное число делится на 9, то сумма его цифр тоже 9 или это число 99. Легко заметить, что число 99 не удовлетворяет условию задачи. Поэтому после второго вычитания получилось число 18 ($9+9$). А после первого – 27 ($18+9$). Видно, что подходят только числа от 30 до 39. Ответ: все числа от 30 до 39.

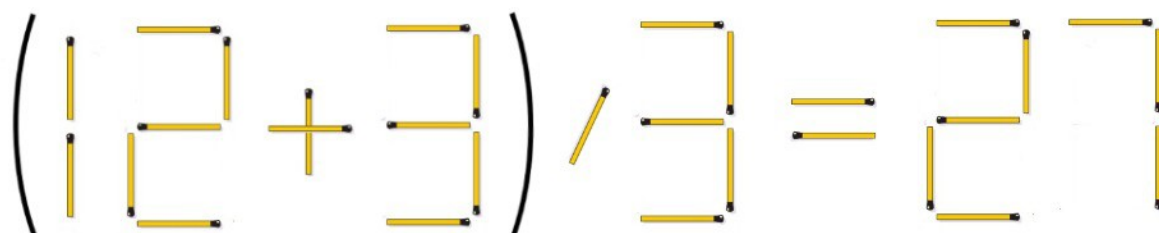
Ответ: 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

Комментарий

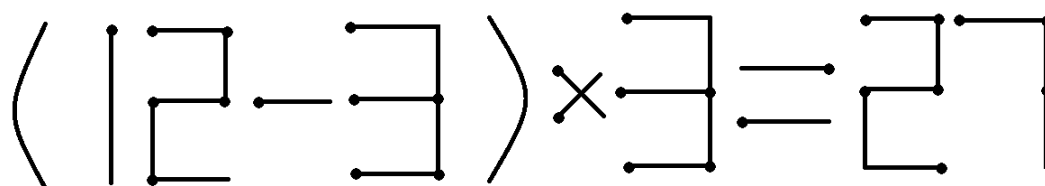
Большинство школьников получили верный ответ, но не смогли его полностью обосновать. Чаще всего в качестве обоснования участники рассматривали числа 29 и 40, для которых требовалось меньше 4-х и больше 4-х операций соответственно, откуда делался вывод, что все числа меньше 30 и больше 39 не подходят. Это действительно так, но делать вывод для всех чисел на основании конкретных примеров нельзя, поэтому такие решения засчитывались, как не полностью верные.

Задача №2

Передвиньте одну спичку так, чтобы получилось верное равенство:



Решение



Комментарий

С этой задачей справились практически все школьники.

Задача №3

Даны три сосуда объемом 8, 5, 3 литра. Первый полный, другие пусты. Как разделить воду на две равные части, переливая ее только между имеющимися сосудами?

Решение

Решение показано на схеме:

$(8,0,0) \rightarrow (3,5,0) \rightarrow (3,2,3) \rightarrow (6,2,0) \rightarrow (6,0,2) \rightarrow (1,5,2) \rightarrow (1,4,3) \rightarrow (4,4,0)$.

Комментарий

С этой задачей справились почти все школьники. Некоторые приводили последовательность переливаний, отличающуюся от указанной в решениях:

$(8,0,0) \rightarrow (5,0,3) \rightarrow (5,3,0) \rightarrow (2,3,3) \rightarrow (2,5,1) \rightarrow (7,0,1) \rightarrow (7,1,0) \rightarrow (4,1,3) \rightarrow (4,4,0)$.

Она длиннее на 1 шаг, но в задаче не требовалось найти оптимальную схему переливаний, поэтому такое решение тоже засчитывалось как полностью верное.

Задача №4

Четверо владельцев автомобилей решили провести гонки из четырех заездов, при этом меняясь в каждом заезде автомобилями. В результате каждый из владельцев проехал на каждом автомобиле.

- ◆ В первом заезде Дмитрий был на автомобиле Василия, а во втором Василий - на автомобиле Евгения.
- ◆ Николай выиграл третий заезд на своем автомобиле «Москвич», причем он выиграл и все остальные заезды.
- ◆ На «Камазе» во втором заезде ехал Евгений, а в четвертом заезде ехал Дмитрий.
- ◆ В четвертом заезде автомобиль «Камаз» пришел вторым после «Волги».

Кому принадлежит автомобиль «Форд Фокус»?

Решение

Из 4-го условия Николай ехал на Волге в 4-ом заезде и выиграл его, а Дмитрий занял второе место на Камазе. В первых 2х заездах Николай был на Форде и на Камазе, но во втором он не мог ехать на Камазе, так как на нем ехал Евгений, значит в 1-ом заезде Николай ехал на Камазе, а во втором на Форде. Автомобиль Евгения не Камаз и не Форд, так как во втором заезде на автомобиле Евгения ехал Василий, а Евгений и Николай ехали на Камазе и на Форде соответственно. Так же Москвич не является автомобилем Евгения, так как Москвич машина Николая. Значит автомобиль Евгения – Волга. Значит автомобиль Василия либо Камаз либо Форд. Так как Дмитрий ехал в 4-ом заезде на Камазе, а в первом на автомобиле Василия, то автомобиль Василия – не Камаз. Значит автомобиль Василия – Форд. Ответ: Форд принадлежал Василию.

Ответ: Василию.

Комментарий

Многие участники получили верный ответ, но далеко не все смогли привести полное решение. Часто был пропущен целый кусок обоснования. Скорее всего в уме школьники проделали все необходимые логические шаги, поэтому смогли верно заполнить таблицу, кто и на какой машине ехал в каждом из заездов, но посчитали не нужным приводить в работе длинные пояснения, почему таблица заполнялась именно так и никак иначе. К сожалению, такие решения жюри засчитывало как неполные, потому что в работе должны в письменном виде присутствовать обоснования всех фактов, на основании которых получен ответ, если эти факты не являются общеизвестными.

8-9 класс

Задача №1

Из числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вновь вычли сумму его (полученного числа) цифр, и так делали снова и снова. После пяти таких вычитаний впервые получился нуль. С какого числа нужно начать? В ответе указать все возможные варианты и доказать, что других нет.

Решение

Любое число минус сумма его цифр в десятичной записи делится на 9. Заметим, что число, с которого мы начинали процесс – двухзначное. А если двухзначное число делится на 9, то сумма его цифр тоже 9 или это число 99. Легко заметить, что число 99 не удовлетворяет условию задачи.. Значит, начиная со второго вычитания число будет каждый раз уменьшаться на 9. Значит перед последним вычитанием было число 9, перед предпоследним 18 и т.д. Следовательно, после первого вычитания получалось число 36. Видно, что подходят только числа от 40 до 49.

Ответ: все числа от 40 до 49.

Комментарий

Большинство школьников получили верный ответ, но не смогли его полностью обосновать. Чаще всего в качестве обоснования участники рассматривали числа 39 и 50, для которых требовалось меньше 5-ти и больше 5-ти операций соответственно, откуда делался вывод, что все числа меньше 49 и больше 49 не подходят. Это действительно так, но делать вывод для всех чисел на основании конкретных примеров нельзя, поэтому такие решения засчитывались, как не полностью верные.

Задача №2

На доске написаны все натуральные числа в ряд, начиная с 1. Какая цифра написана на 107321 месте?

Решение

Однозначных чисел 9. Двузначных 90. Трехзначных 900 и т. д. Заметим, что $1*9+2*90+3*900+4*9000 < 107321$, $1*9+2*90+3*900+4*9000+5*90000 > 107321$. Значит цифра стоящая на этом месте принадлежит пятизначному числу. $1*9+2*90+3*900+4*9000 = 38889$. На этом месте стоит цифра 9. Посчитаем, сколько пятизначных чисел было

написано до цифры с номером 107321. Это количество равно $\frac{107321 - 38889}{5} = 13686$

. Значит искомая цифра – вторая в 13687ом пятизначном числе.

Ответ: 3.

Комментарий

Многие школьники в этой задаче указывали только ответ, без каких-либо доказательств. Скорее всего, они проделали в уме все необходимые расчеты, но посчитали не нужным приводить их в работе, такие решения считались не верными, тем более, что в данном случае ответ выбирался всего из 10 возможных цифр, поэтому его можно было просто угадать. Кроме того, часто встречалась

ошибка, когда школьники писали, что искомой является вторая цифра в числе 13687, на самом деле это вторая цифра числа 23686, то есть 13687-го из пятизначных, хотя ответ и получался таким же, решение оценивалось как не полностью верное.

Задача №3

Даны три сосуда объемом 8, 5, 3 литра. Первый полный, другие пусты. Как разделить воду на две равные части, переливая ее только между имеющимися сосудами?

Решение

Решение показано на схеме:

$(8,0,0) \rightarrow (3,5,0) \rightarrow (3,2,3) \rightarrow (6,2,0) \rightarrow (6,0,2) \rightarrow (1,5,2) \rightarrow (1,4,3) \rightarrow (4,4,0)$.

Комментарий

С этой задачей справились почти все школьники. Некоторые приводили последовательность переливаний, отличающуюся от указанной в решениях:

$(8,0,0) \rightarrow (5,0,3) \rightarrow (5,3,0) \rightarrow (2,3,3) \rightarrow (2,5,1) \rightarrow (7,0,1) \rightarrow (7,1,0) \rightarrow (4,1,3) \rightarrow (4,4,0)$.

Она длиннее на 1 шаг, но в задаче не требовалось найти оптимальную схему переливаний, поэтому такое решение тоже засчитывалось как полностью верное.

Задача №4

В космический полет набрали команду из четырех ученых: физик, химик, биолог и математик. Национальности их были различные, и, хотя каждый из ученых владел двумя языками из четырех (русский, английский, французский, итальянский), не было такого языка, на котором они могли бы разговаривать вчетвером.

Был язык, на котором могли разговаривать сразу трое. Никто из ученых не владел французским и русскими языками одновременно. Не было языка, на котором могли говорить и биолог, и химик. Но физик, хотя и не знал английского, мог быть для них переводчиком, если биолог и химик захотели бы поговорить друг с другом. Химик говорил по-русски и мог говорить с математиком, хотя тот не знал ни одного русского слова. Физик, биолог и математик не могли беседовать втроем на одном языке.

На каком языке могли разговаривать трое ученых? Свои рассуждения объяснить.

Решение

По условию ясно, что Физик не говорит на английском, химик говорит на русском, биолог и математик на русском не говорят. Так как химик говорит на русском, то он не может говорить на французском. Биолог говорит на французском, иначе неизбежно у них с химиком будет общий язык. Пусть теперь Физик говорит на русском. Из того, что французским и русским не владеет одновременно никто, Физик должен говорить на итальянском. Тогда, что бы он мог перевести химику и биологу, биолог должен говорить на итальянском. Тогда математик говорить на итальянском не может и ему остаются только французский и английский. А химик Говорит еще и на английском, чтобы не пересекаться с биологом. Но тогда нет ни одного языка, на котором говорили бы трое.

Следовательно, физик говорит на французском. Тогда математик говорит на испанском и английском так как не может говорить на французском. А химик должен говорить на итальянском, что бы физик мог переводить ему и биологу. Тогда искомый язык - итальянский.

Комментарий

Большинство получили верный ответ в задаче, но лишь не многие привели доказательство, как этот ответ был получен. Часто был пропущен целый кусок обоснования. Скорее всего в уме школьники проделали все необходимые логические шаги, поэтому смогли верно заполнить таблицу, кто и на каком языке разговаривал, но посчитали не нужным приводить в работе длинные пояснения, почему таблица заполнялась именно так и никак иначе. К сожалению, такие решения жюри засчитывало как неполные, потому что в работе должны в письменном виде присутствовать обоснования всех фактов, на основании которых получен ответ, если эти факты не являются общеизвестными.

Конкурс для учителей

Задача №1

Из числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вновь вычли сумму его (полученного числа) цифр, и так делали снова и снова. После четырех таких вычитаний впервые получился нуль. Найти все такие числа. В ответе указать все возможные варианты в порядке возрастания, записав их через запятую. Докажите, что других нет.

Решение

Любое число минус сумма его цифр в десятичной записи делится на 9. Любое число, в котором более одной цифры больше суммы своих цифр. Поэтому перед четвертым вычитанием получилось число 9. Число 9 может получиться только из двухзначного числа. Причем это число делится на 9. А если двухзначное число делится на 9, то сумма его цифр тоже 9 или это число 99. Легко заметить, что число 99 не удовлетворяет условию задачи. Поэтому после второго вычитания получилось число 18 ($9+9$). А после первого – 27 ($18+9$). Видно, что подходят только числа от 30 до 39.

Ответ: все числа от 30 до 39.

Комментарий

Во многих работах был получен верный ответ, но не все смогли его обосновать. Чаще всего в качестве обоснования участники рассматривали числа 29 и 40, для которых требовалось меньше 4-х и больше 4-х операций соответственно, откуда делался вывод, что все числа меньше 29 и 50 не подходят. Это действительно так, но делать вывод для всех чисел на основании конкретных примеров нельзя, поэтому такие решения засчитывались, как не полностью верные.

В некоторых работах терялся один из ответов (обычно 30), либо получался ответ 36 (совсем не обязательно, что исходное число делилось на 9, число становилось кратным 9 уже после первого вычитания).

Задача №2

На столе лежат 15 спичек. Двое игроков берут по очереди 1, 3 или 4 спички. Выигрывает тот, кто забирает последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре? И как надо играть?

Решение

Выигрышная стратегия есть у первого игрока. Своим первым ходом он берет одну спичку. Осталось 14. После хода второго может остаться: 13 (тогда первый берет 4), 11 (тогда первый берет 4), 10 (тогда первый берет 1). У второго 7 или 9 спичек.

Пусть осталось 9. После хода второго может остаться 8, 6, 5 спичек. Тогда первый оставляет 7 или 2.

Пусть осталось 7 спичек. После хода второго может остаться 6, 4, 3 спички. Тогда первый забирает все (если их было 3 или 4) или оставляет 2.

Итак, второго две спички и он может забрать только одну. Одна остается и первый выиграл.

Комментарий

Напомним, что победителем при правильной игре будет тот, и только тот игрок, у которого есть выигрышная стратегия все зависимости от ходов другого игрока. В этой задаче некоторые участники ограничились только ответом, не приведя стратегии, как нужно играть, а это и есть самое главное в решении.

Некоторые участники в своих работах расписывали, какое количество спичек, оставшееся игроку после хода противника является выигрышной или проигрышной позицией. В этих решениях проводился анализ с конца. Напомним, что позиция называется выигрышной, если есть возможность сделать такой ход, чтобы противнику досталась проигрышная позиция. Проигрышной же называется позиция, при которой любой ход приводит противника в выигрышную позицию.

Будем двигаться с конца и обозначим каждую позицию, выигрышная она или проигрышная.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
П	В	П	В	В	В	В	П	В	В	В	В	П	В	П	В

Получаем, что изначально 1-й игрок находится в выигрышной позиции, значит он сможет выиграть вне зависимости от игры второго.

Задача №3

Даны три сосуда объемом 8, 5, 3 литра. Первый полный, другие пусты. Как разделить воду на две равные части, переливая ее только между имеющимися сосудами?

Решение

Решение показано на схеме:

$$(8,0,0) \rightarrow (3,5,0) \rightarrow (3,2,3) \rightarrow (6,2,0) \rightarrow (6,0,2) \rightarrow (1,5,2) \rightarrow (1,4,3) \rightarrow (4,4,0).$$

Комментарий

Некоторые приводили последовательность переливаний, отличающуюся от указанной в решениях:

$$(8,0,0) \rightarrow (5,0,3) \rightarrow (5,3,0) \rightarrow (2,3,3) \rightarrow (2,5,1) \rightarrow (7,0,1) \rightarrow (7,1,0) \rightarrow (4,1,3) \rightarrow (4,4,0).$$

Она длиннее на 1 шаг, но в задаче не требовалось найти оптимальную схему переливаний, поэтому такое решение тоже верное.

Задача №4

В очереди за билетами в кино стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что:

- ♦ Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега;

- ◆ Володя и Олег не стоят рядом;
- ◆ Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей.

Кто стоит третьим?

Решение

Из условия ясно, что Олег стоит раньше Юры, а Юра раньше Миши. Саша может стоять только рядом с Мишей. Если Саша стоит не последним, то он стоит перед Мишей, а следовательно перед ним может стоять или Юра или Володя, что противоречит условию. Так же Володя не может стоять за Сашей. Володя и Олег не стоят рядом. Следовательно. Володя стоит за Юрой. Таким образом, третьим стоит Володя.

Ответ: Володя.

Комментарий

Многие привели верные решения этой задачи, но в некоторых работах был указан только ответ, либо написаны все номера мальчиков в очереди, в данной задаче нужно было так же объяснить, почему такая расстановка в очереди единственная удовлетворяет всем условиям задачи.



Электронная школа Знаника
<http://znanika.ru>