Волшебный сундучок

Всероссийский математический конкурс

Разбор задач первой части заданий

4-5 класс

1	2	3	4	5
Г	Б	А	Г	Г

Комментарий

Так как в задачах из этой части нужно было только указать ответ без пояснений, мы не можем отследить, как был получен тот или иной неверный ответ. Скорее всего часто школьники указывали букву наугад, когда не могли решить задачу. Тем не менее, в некоторых задачах из всех неверных вариантов предпочитался один. С большинством задач многие школьники справились. Разберем те задачи, в которых доля неверных ответов была значительной.

Задача №1

Вместо звездочек вставьте цифры так, чтобы получилось верное выражение. В ответе укажите цифру, которая стоит между цифрами 7 и 8 в нижней строке.

$$\begin{array}{rrr} & 2 & * \\ \times & & \\ & * & 2 \\ \hline & * & 8 \\ 7 & * & \\ \hline 7 & * & 8 \end{array}$$

А. 3 Б. 4 В. 2 **Г. 6** Д. 5

Решение

Цифра, которая стоит вместо * в первом множителе при умножении на 2 должна заканчиваться на 8. Поэтому это 4 или 9. Предположим это 9. Тогда число 29 умножается на какую-то цифру и получается двухзначное число, которое начинается на 7, т.е. находится в диапазоне от 70 до 79. Если 29 умножить на два, то получится число 58, которое меньше 70, а если 29 умножить на 3, то получиться число больше чем 79, поэтому такой цифры нет. Поэтому первый множитель 24. В 4-ой строке стоит число от 70 до 79, поэтому 24, умноженное на какую-то цифру должно быть от 70 до 79. $24*2<70$, $24*3=72$, $24*4>79$, значит второе число 32. Тогда $24*32=768$.

Ответ: 6.

Задача №2

Сколько трехзначных чисел можно составить из двух цифр 0 и 7?

А. 2 **Б. 4** В. 6 Г. 8 Д. 10

Решение

Заметим, что на первом месте не может стоять 0. Тогда на первом месте по условию задачи обязана стоять цифра 7. На любом другом месте может стоять как цифра 0 так и цифра 7. Каждому варианту количества десятков соответствует два варианта выбора количества единиц, таким образом, всего можно составить 2*2=4 различных трехзначных числа.

Ответ: 4.

Задача №3

В футбольной команде 11 человек, сколькими способами можно выбрать капитана и его заместителя?

А. 110 Б. 100 В. 90 Г. 75 Д. 55

Решение

Пусть капитан выбирается первым. Выбрать капитана из 11 человек можно 11 способами. Из оставшихся человек выбрать заместителя можно 10 способами. Так как каждому способу выбрать капитана соответствует 10 способов выбора заместителя, то 11 надо умножить на 10. Отсюда 11*10=110 способов.

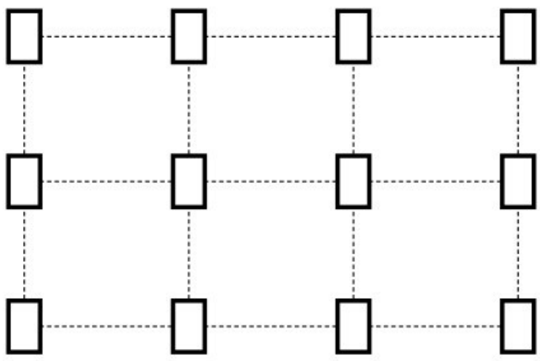
Ответ: 110.

Комментарий

В работах часто встречался вариант Д (55). Если бы из 11 человек мы выбирали двух напарников, этот ответ был бы верным. Действительно, первого напарника мы выбираем 11 способами, а второго 10. Нам нужно умножить 11 на 10, чтобы получить все возможные комбинации, а затем поделить на 2, потому что каждую пару мы посчитали 2 раза. В предложенной же задаче не нужно было делить на 2, потому что здесь выбор пары «капитан Вася и заместитель Петя» (назовем их так) не идентичен выбору пары «капитан Петя и заместитель Вася», это 2 разных способа, поэтому верный ответ 110, а не 55.

Задача №4

На рисунке схема, где прямоугольниками обозначены города, а пунктирными линиями дороги. Рабочим нужно закрыть для ремонта несколько дорог. Какое максимальное количество дорог можно закрыть одновременно, чтобы можно было проехать из любого города в любой?

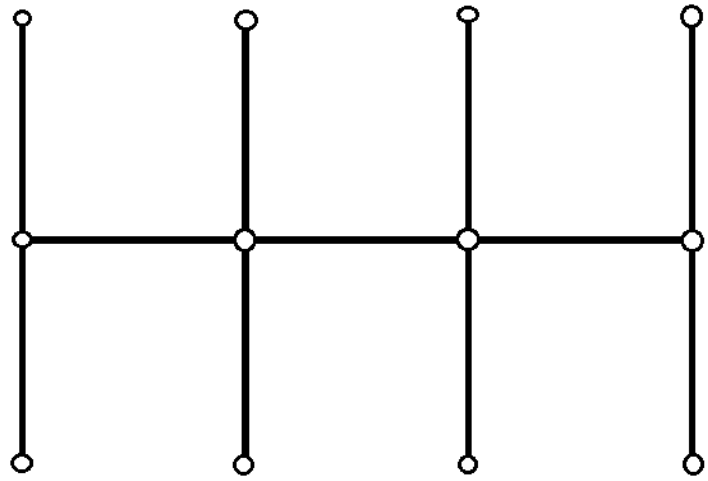


А. 8 Б. 7 В. 4 **Г. 6** Д. 5

Решение

Покажем, что семь дорог нельзя перекрыть. Всего дорог 17, если семь из них перекрыть, то останется всего 10 дорог. А 10 дорог может соединить только 11 городов: первая дорога соединяет два города, а каждая следующая дорога присоединяет только один город. А у нас городов 10. Таким образом, получаем, что семь дорог перекрыть нельзя.

Шесть дорог можно закрыть, например, так:



Ответ: 6.

<u>Задача №5</u>

В наборе из нескольких монет одна фальшивая, поэтому весит меньше, чем другие. Известно, что ее можно отыскать без гирь за два взвешивания на чашечных весах. Каково максимальное число монет в этом наборе?

Замечание. Взвешивание на чашечных весах двух кучек позволяет определить, какая из них весит больше, или установить равенство их веса.

А. 4 Б. 6 В. 8 **Г. 9** Д. 10

Решение

Понятно, что при любом взвешивании, мы будем на чаши весов класть по одинаковому количеству монет, иначе мы не получим никакой полезной информации после взвешивания. Любое взвешивание разбивает множество монет на три множества (монеты на левой и на правой чашах и те которые не участвовали при взвешивании). И после любого взвешивания однозначно определяется множество, содержащее фальшивую монету: если весы в равновесии, то фальшивая монета не принимала участия во взвешивании. Пусть есть хотя бы 10 монет, тогда после первого взвешивания может остаться множество монет, содержащее фальшивую монету и состоящее не менее чем из 4-х монет. После второго взвешивания может остаться множество с фальшивой монетой, состоящее хотя бы из 2-х монет. Значит не всегда можно определить фальшивую монету за 2 взвешивания среди хотя бы 10-ти монет. Если монет 9, то делим монеты на три равные части. И после первого взвешивания останется 3 подозрительные монеты. Две из них взвешиваем и однозначно определяем фальшивую монету.

Ответ: 9 монет.

Комментарий

Эта задача оказалась самой сложной в работе. С ней справилось меньше половины участников. Чаще всего указывали варианты А (4) и Б (6). По всей видимости школьники смогли отыскать способ найти фальшивую монету из 4 либо 6 монет и подумали, что раз им не удалось придумать для большего числа, то это сделать невозможно. На самом деле это не так. В таких задачах всегда следует придумывать обоснование, почему для большего числа невозможно выполнить условие.

6-7 класс

1	2	3	4	5
Б	Б	Г	Г	В

Комментарий

Так как в задачах из этой части нужно было только указать ответ без пояснений, мы не можем отследить, как был получен тот или иной неверный ответ. Скорее всего часто школьники указывали букву наугад, когда не могли решить задачу. Тем не менее, в некоторых задачах из всех неверных вариантов предпочитался один. С большинством задач многие школьники справились. Разберем те задачи, в которых доля неверных ответов была значительной.

Задача №1

Вместо звездочек вставьте цифры так, чтобы получилось верное выражение. В ответе укажите цифру, заключенную в скобки.

```
      * *
×
      8 *
---------
    * * *
    * *
---------
* * * (*)
```

А. 7 **Б. 8** В. 9 Г. 0 Д. 6

Решение

Из условия видно, что если первый множитель умножить на 8, то получится двухзначное число, а если умножить на *, то трехзначное. Значит эта * больше 8 и это цифра, значит это 9. Первый множитель не больше 12, так как 12*8=96, а 13*8=104 - трехзначное. Осталось перебрать числа 10, 11, 12. В произведении должно получиться четырехзначное число. В итоге 12*89=1068.

Ответ: 8.

Задача №2

Сколько четырехзначных чисел, можно составить из двух цифр 0 и 7?

А. 6 **Б. 8** В. 10 Г. 12 Д. 16

Решение

Заметим, что на первом месте не может стоять 0. Тогда на первом месте по условию задачи обязана стоять цифра 7. На любом другом месте может стоять как цифра 0 так и цифра 7. Следовательно, вариантов поставить число на одну позицию два. Таким образом, вариантов расставить два числа на трёх позициях 2*2*2=8.

Ответ: 8.

Комментарий

Среди неправильных чаще всего встречались варианты ответов А и Д. Заметим, что вариант А можно было получить, если решать задачу перебором, но при этом потерять 2 допустимых варианта. А вот ответ Д получался, если забыть, что четырехзначные числа не могут начинаться с цифры 0. Если бы нужно было найти количество последовательностей из 4-х цифр, состоящих из 0 и 7, то ответ действительно был бы 16.

<u>Задача №3</u>

Сколько различных слов (необязательно осмысленных) можно получить перестановками букв в слове ИНФОРМАТИКА.

А. 39916800 Б. 19958400 В. 3326400 **Г. 9979200** Д. 4989600

Решение

Составим новое слово из букв ИНФОРМАТИКА. У нас есть 11 вариантов выбрать букву на первую позицию. Так как одну и ту же букву мы не можем использовать два раза, то вариантов выбрать букву на вторую позицию 10. Тогда заполнить все позиции возможно $11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 39916800$ способами. Очевидно, что от перестановок одинаковых букв слово не изменится. Такие буквы И и А встречаются по два раза каждая. Существуют только два слова одинаковые во всем, кроме порядка букв И или А в слове т. е. каждое слово посчитано 4 раза Следовательно ответ $\frac{39916800}{4} = 9979200$.

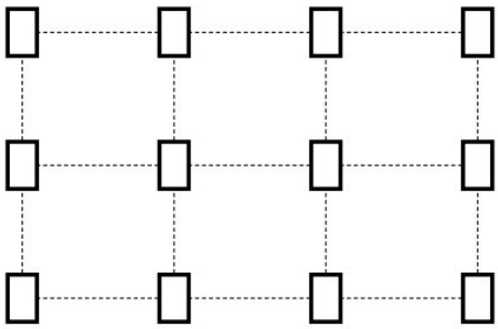
Ответ: 9979200.

<u>Комментарий</u>

Эта задача оказалась самой сложной в тестовом блоке. Больше половины школьников решили ее неверно. Самым популярным ответом был А, он был бы верным в том случае, если бы в исходном слове все буквы были бы различными, но так как в слове ИНФОРМАТИКА 2 раза встречается буква А и два раза буква И, то получается, что мы по 4 раза посчитали каждое слово, поэтому и ответ в 4 раза меньше.

<u>Задача №4</u>

На рисунке схема, где прямоугольниками обозначены города, а пунктирными линиями дороги. Рабочим нужно закрыть для ремонта несколько дорог. Какое максимальное количество дорог можно закрыть одновременно, чтобы можно было проехать из любого города в любой?

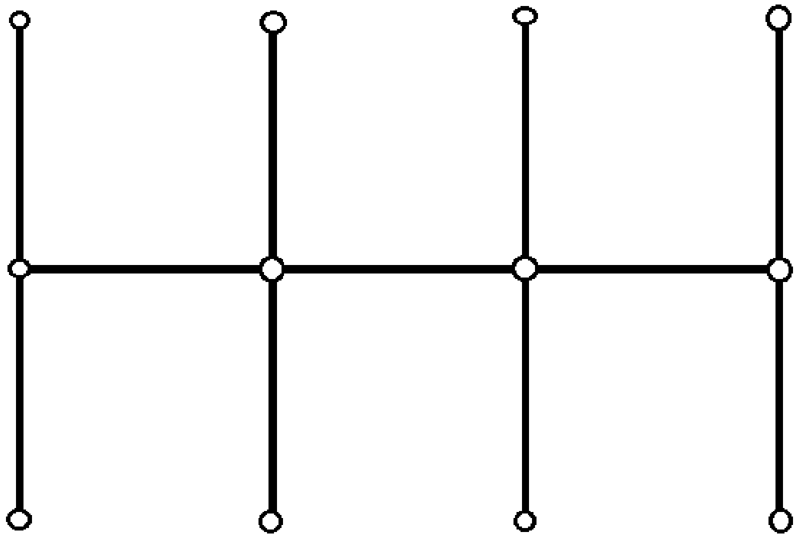


А. 8 Б. 7 В. 4 **Г. 6** Д. 5

Решение

Покажем, что семь дорог нельзя перекрыть. Всего дорог 17, если семь из них перекрыть, то останется всего 10 дорог. А 10 дорог может соединить только 11 городов: первая дорога соединяет два города, а каждая следующая дорога присоединяет только один город. А у нас городов 10. Таким образом, получаем, что семь дорог перекрыть нельзя.

Шесть дорог можно закрыть, например, так:



Ответ: 6.

<u>**Задача №5**</u>

В наборе из нескольких монет одна фальшивая, поэтому весит меньше, чем другие. Известно, что за три взвешивания на чашечных весах без гирь ее можно отыскать. Каково максимальное число монет в этом наборе?

Замечание. Взвешивание на чашечных весах двух кучек позволяет определить, какая из них весит больше, или установить равенство их веса.

А. 6 Б. 9 **В. 27** Г. 81 Д. 16

Решение

Понятно, что при любом взвешивании, мы будем на чаши весов класть по одинаковому количеству монет, иначе мы не получим никакой полезной информации после взвешивания. Любое взвешивание разбивает множество монет на 3 множества (монеты на левой и на правой чашах и те которые не участвовали при взвешивании). И после любого взвешивания однозначно определяется множество, содержащее фальшивую монету. Пусть есть хотя бы 28 монет, тогда после первого взвешивания может остаться множество монет, содержащее фальшивую и состоящее не менее чем из 10-ти монет. После второго взвешивания может остаться множество с фальшивой монетой состоящее хотя бы из 4-х монет. После третьего взвешивания может остаться множество с фальшивой монетой состоящее хотя бы из 2-х монет. Значит не всегда можно определить фальшивую монету за 3 взвешивания среди хотя бы 28-ти монет. Если монет 27, то после первого

взвешивания останется 9 подозрительных монеты, после второго останется 3 подозрительных монеты, а после 3-го ровно одна.
Ответ: 27 монет.

Комментарий

В этой задаче количество верных и неверных ответов было примерно одинаковым. Самым популярным среди неверных ответов был Б. По всей видимости, школьникам удалось за 3 взвешивания определить фальшивую монету среди 9 монет, а для большего числа не получилось, поэтому и был выбран такой ответ. Заметим, что в кучке из 9 монет фальшивую монету, которая легче остальных можно определить всего за 2 взвешивания, а вот для любого количества монет от 10 до 27 понадобится уже целых 3 взвешивания.

8-9 класс

1	2	3	4	5
Г	Г	Б	Г	

Комментарий

Так как в задачах из этой части нужно было только указать ответ без пояснений, мы не можем отследить, как был получен тот или иной неверный ответ. Скорее всего часто школьники указывали букву наугад, когда не могли решить задачу. Тем не менее, в некоторых задачах из всех неверных вариантов предпочитался один. С большинством задач многие школьники справились. Разберем те задачи, в которых доля неверных ответов была значительной.

Задача №1

В примере все цифры заменены буквами, одинаковые – одинаковыми, разные – разными.

РОМА + РОМА + РОМА + РОМА = МАРТ

Найдите букву Т.

А. 0 Б. 2 В. 4 **Г. 6** Д. 8

Решение

4*РОМА=МАРТ. Значит 1000<РОМА<2500 => 0<Р<3. МАРТ>4000 => М>3.Если 4А<10, то остаток от деления на 10 числа 4М равен Р. Р=1 или 2. Подставляя все цифры от 4 до 9 вместо М видно, что подходит только М=8. Если 9<4А<20, то по аналогичным рассуждениям получаем, что М=5. Если 19<4А<37, то получаем М=5 и М=7. Значит М=5,7,8.Если М=8, то 4А<10 (А=0,1,2) , а значит Р=2 => так как РОМА<2500, то О<5, и остаток от деления числа 4*О+3 на 10 равен А. Подставляя вместо О цифры от 0 до 4,видно, что подходит только число 2 => О=2, но тогда 4*О+3>10, а значит М=9, противоречие. Если М=7, то 4А>29 (А=8,9) и Р=1, тогда 4*О+3>29 и 4*О+3 дает остаток 7 при делении на 10, что невозможно, противоречие. Значит М=5. Отсюда Р=1, 9<4*О+2<20, значит О=2,3,4. 9<4А<20 отсюда А=3,4. 4*О+2 четно, значит не может давать нечетный остаток при делении на 10, значит А=4, значит 4*О+2=14, отсюда О=3. 1354*4=5416. Значит Т=6.

Ответ: 6.

Комментарий

Все неправильные ответы в этой задаче встречались в работах примерно одинаковое количество раз, по всей видимости школьники просто пытались угадать верный ответ.

Задача №2

Сколько пятизначных чисел можно составить из трёх цифр 0, 1 и 7?

А. 48 Б. 54 В. 81 **Г. 162** Д. 243

Решение

Заметим, что на первой позиции не может стоять 0. Тогда выбрать цифру для первой позиции мы можем двумя способами. На любую другую позицию мы можем поставить любую из трёх цифр, следовательно всего вариантов расстановки цифр 2*3*3*3*3=162
Ответ: 162.

<u>Комментарий</u>

С этой задачей так же справилось большинство учеников. Заметим, что в отличие от 6-7 класса практически все школьники понимают разницу между пятизначным числом (которое не может начинаться с 0) и последовательностью из пяти цифр (которая начинаться с 0 может), поэтому на вариант Д мало кто купился.

<u>Задача №3</u>

Какое минимальное количество карт из колоды (36 карт) нужно вытащить, чтобы гарантированно найти все 4 масти?

А. 4 **Б. 28** В. 36 Г. 18 Д. 9

Решение

Карт каждой масти 9. Если вытащить 27 карт, то все они могут оказаться только трех мастей. Пусть вытащили 28 карт и среди первых 27 карты только трех мастей, тогда в колоде останутся карты только четвертой масти. И 28-я карта будет уже 4-й масти.
Ответ: 28.

<u>Комментарий</u>

В этой задаче среди неправильных самым популярным ответом был вариант Д, что странно, потому что вытащив 9 карт, в них может не оказаться даже 2х карт разных мастей, а не то, что 4х, ведь все они могут быть одной масти, хотя вероятность вытащить все карты одной масти из колоды очень маленькая.

<u>Задача №4</u>

1000 команд играют на «вылет» в турнире по волейболу. Какое минимальное количество матчей необходимо для нахождения победителя?

А. 10 Б. 499 В. 500 **Г. 999** Д. 1000

Решение

За один матч отсеивается ровно одна команда. В итоге осталась только одна команда. Следовательно, было отсеяно ровно 999 команд. Значит, потребуется 999 матчей.
Ответ: 999.

<u>Комментарий</u>

В этой задаче многие участники выбирали вариант А. По всей видимости, они не разобрались, что такое турнир на вылет. В турнире на вылет в каждом матче играют две команды, после чего победитель остается в турнире, а проигравший выбывает. Заметим, что если бы в турнире были раунды, в которых одновременно играют все команды друг с другом (например в первом раунде играют 500 пар друг с другом), после чего проигравшие покидают турнир, а победители опять делятся на пары, то таких раундов действительно было бы 10.

Задача №5

В наборе из нескольких монет одна фальшивая, либо больше, либо меньше, чем остальные. Известно, что за три взвешивания на чашечных весах без гирь ее можно отыскать. Каково максимальное число монет в этом наборе?

Замечание. Взвешивание на чашечных весах двух кучек позволяет определить, какая из них весит больше, или установить равенство их веса.

А. 3 Б. 9 В. 15 Г. 21 Д. 27

Решение

За k взвешиваний мы можем понять, какая монета фальшивая при наборе в $(3^k+1)/2$ монет. То есть за 3 взвешивания, мы можем выяснить фальшивую монету в наборе из не более 14 монет. Поясним, откуда берется эта оценка сверху. Когда мы делаем взвешивание, весы попадают в одно из трех состояний (больше, меньше, равно). То есть после k взвешиваний, у нас может быть 3^k различных исходов. Для n монет существует 2n исходов того, какая монета окажется фальшивой, и будет она легче или тяжелее настоящей. Таким образом, получается, что за k взвешиваний мы сможем отличить только 3^k различных исходов, но на самом деле нам не обязательно различать исходы, легче или тяжелее фальшивая монета, если она уже найдена, поэтому за k взвешиваний мы можем понять, какая монета фальшивая при наборе в $(3^k+1)/2$ монет. Важно, что про все эти монеты мы изначально ничего не знаем.

Посмотрим, сможем ли мы за 3 взвешивания определить фальшивую монету из 14 монет. Допустим первым взвешиванием мы взвесим на каждой чаше весов по 4 (или менее монеты), тогда в случае равенства весов, подозрительная монета будет находиться среди оставшихся монет. Их будет не менее 6. Тогда у нас останется 2 взвешивания, а как мы доказали, за 2 взвешивания, мы можем найти фальшивую монету в наборе из не более $(3^2+1)/2 = 5$ монет.

Так же первым взвешиванием мы могли положить на каждую чашу весов 5 или более монет. Тогда в случае неравенства, получаем, что фальшивой является одна из этих 10 (или более) монет, но про каждую подозрительную монету мы знаем, легче она или тяжелее настоящей, если является фальшивой, в зависимости от того, на какой чаше весов она лежит. За оставшиеся 2 взвешивания мы можем получить только 9 различных исходов (3^2), поэтому определить ее не сможем.

Получается, что с 14 монетами нам за 3 взвешивания не разобраться. Сейчас покажем, как мы сможем найти фальшивую монету из 13.

Первым взвешиванием возьмем по 4 монеты. Если получилось равенство, то будем считать, что у нас есть 8 настоящий монет и 5 подозрительных, про которые мы не знаем, легче или тяжелее они, чем настоящая. Вторым взвешиванием возьмем 3 подозрительные монеты с 3 настоящими. Если опять получилось равенство, то фальшивая среди 2х оставшихся, тогда взвесим одну из них с одной настоящей и определим она ли фальшивая или та, которую не взвешивали ни разу.

Если 3 подозрительные легче (для тяжелее все аналогично) 3х настоящий, то мы знаем, что фальшивая среди 3х подозрительных и она легче. Тогда возьмем и взвесим пару подозрительных монет друг с другом. Если одна из них легче, то она фальшивая, если они равны, то фальшивая третья.

Если в первом взвешивании получилось неравенство, то у нас есть 4 подозрительных легких монеты, 4 подозрительных тяжелых монеты и 5 настоящих монет. Тогда вторым взвешиванием взвесим на одной чаше 5 настоящих монет, а на другой 3 подозрительных легких и 2 подозрительных тяжелых. Если опять получилось равенство, тогда фальшивая монета среди 3х оставшихся монет – одной подозрительной легкой и 2х подозрительных тяжелых. Взвесим друг с другом 2 подозрительные тяжелые монеты. Если одна из них перевесила, то она фальшивая, если равенство – то фальшивая – оставшаяся легкая.

Если во втором взвешивании перевесили настоящие монеты, то фальшивая одна из 3х подозрительных легких со второй чаши весов, тогда возьмем пару из них и взвесим друг с другом, если одна из них легче, то она фальшивая, если равенство, то оставшаяся третья.

Если во втором взвешивании настоящие монеты легче, то фальшивая одна из 2х подозрительных тяжелых со второй чаши весов, тогда возьмем их и взвесим друг с другом, фальшивая та, которая перевесит.

Мы разобрали все возможные исходы и везде определили фальшивую монету.

Ответ: 13.

Комментарий

В этой задаче не было верного ответа среди предложенных, но так как нужно было найти максимальное возможное число монет в наборе, то следовало выбирать вариант Б (среди наборов из большего числа монет 15, 21, 27 найти монету за 3 взвешивания было никак нельзя). Тем не менее, в этой задаче около половины участников выбрали эти варианты. Вариант А так же встречался в некоторых работах, видимо, эти школьники не смогли придумать, как можно найти фальшивку в наборе из 9 монет.

Конкурс для учителей

1	2	3	4	5
Г	Б	Б	Г	Г

Комментарий

Так как в задачах из этой части нужно было только указать ответ без пояснений, мы не можем отследить, как был получен тот или иной неверный ответ. Разберем те задачи, в которых доля неверных ответов была значительной.

Задача №1

В примере все цифры заменены буквами, одинаковые – одинаковыми, разные – разными.

РОМА + РОМА + РОМА + РОМА = МАРТ

Найдите букву Т.

А. 0 Б. 2 В. 4 **Г. 6** Д. 8

Решение

4*РОМА=МАРТ. Значит 1000<РОМА<2500 => 0<Р<3. МАРТ>4000 => М>3.Если 4А<10, то остаток от деления на 10 числа 4М равен Р. Р=1 или 2. Подставляя все цифры от 4 до 9 вместо М видно, что подходит только М=8. Если 9<4А<20, то по аналогичным рассуждениям получаем, что М=5. Если 19<4А<37, то получаем М=5 и М=7. Значит М=5,7,8.Если М=8, то 4А<10 (А=0,1,2) , а значит Р=2 => так как РОМА<2500, то О<5, и остаток от деления числа 4*О+3 на 10 равен А. Подставляя вместо О цифры от 0 до 4,видно, что подходит только число 2 => О=2, но тогда 4*О+3>10, а значит М=9, противоречие. Если М=7, то 4А>29 (А=8,9) и Р=1, тогда 4*О+3>29 и 4*О+3 дает остаток 7 при делении на 10, что невозможно, противоречие. Значит М=5. Отсюда Р=1, 9<4*О+2<20, значит О=2,3,4. 9<4А<20 отсюда А=3,4. 4*О+2 четно, значит не может давать нечетный остаток при делении на 10, значит А=4, значит 4*О+2=14, отсюда О=3. 1354*4=5416. Значит Т=6.

Ответ: 6.

Задача №2

Программист печатает все натуральные числа, начиная с единицы, по одному в каждой строке. Однако на клавиатуре его компьютера не работает клавиша с цифрой «5». Поэтому он пропускает все числа, в которых встречается эта цифра. Какое число будет напечатано на 2014 строке.

А. 2787 **Б. 2788** В. 2789 Г. 2677 Д. 2777

Решение

Заметим, что программист пишет числа в девятеричной системе исчисления. Переведем 2014 в 9-теричную систему счисления. 2014 в 9-теиричной равно 2677. Установим соответствие между цифрами 9-теричной и десятичной систем счисления.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0	1	2	3	4	---	5	6	7	8

В итоге 2 перейдет в 2, 6 в 7, а 7 в 8. Ответ: 2788.
Ответ: 2788.

Комментарий

Здесь среди неправильных чаще всего встречался вариант В.

Задача №3

Сколькими способами можно расставить 5 белых ладей, не бьющих друг друга, на доске 5×5?

А. 130 **Б. 120** В. 24 Г. 720 Д. 25

Решение

Ладьи не бьют друг друга, если в каждом столбце и каждой строке стоит ровно одна ладья. В первую строку для ладьи есть 5 позиций. Во второй на одну меньше. И т. д. В последней строке – ровно одна позиция. Ответ: 5*4*3*2*1 = 120

Ответ: 120.

Комментарий

Среди неправильных в основном встречались варианты В и Д. Заметим, что в решении предполагалось, что доска зафиксирована на столе, а значит все расстановки, которые можно получить путем переворачивания доски считались, как различные.

Задача №4

1000 команд играют на «вылет» в турнире по волейболу. Какое минимальное количество матчей необходимо для нахождения победителя?

А. 10 Б. 499 В. 500 **Г. 999** Д. 1000

Решение

За один матч отсеивается ровно одна команда. В итоге осталась только одна команда. Следовательно, было отсеяно ровно 999 команд. Значит, потребуется 999 матчей.

Ответ: 999.

Комментарий

Среди неправильных чаще всего встречался вариант А. По всей видимости, возникла путаница в том, что такое турнир на вылет. В турнире на вылет в каждом матче играют две команды, после чего победитель остается в турнире, а проигравший выбывает. Заметим, что если бы в турнире были раунды, в которых одновременно играют все команды друг с другом (например в первом раунде играют 500 пар друг с другом), после чего проигравшие покидают турнир, а победители опять делятся на пары, то таких раундов действительно было бы 10.

Задача №5

Среди 2014 монет, одинаковых по внешнему виду, одна фальшивая. Нам известно, что она отличается по весу от настоящих, но неизвестно, весит ли она меньше или же больше, чем остальные. Найдите минимальное количество взвешиваний, за которое можно определить фальшивую монету на чашечных весах без гирь.

Замечание. Взвешивание на чашечных весах двух кучек позволяет определить, какая из них весит больше, или установить равенство их веса.

А. 1007 Б. 10 В. 11 **Г. 8** Д. 503

Решение

Когда мы делаем взвешивание, весы попадают в одно из трех состояний (больше, меньше, равно). То есть после k взвешиваний, у нас может быть 3k различных исходов. Для n монет существует 2n исходов того, какая монета окажется фальшивой, и будет она легче или тяжелее настоящей. Таким образом, получается, что за k взвешиваний мы сможем отличить только 3k различных исходов, но на самом деле нам не обязательно различать исходы, легче или тяжелее фальшивая монета, если она уже найдена, поэтому за k взвешиваний мы можем понять, какая монета фальшивая при наборе в (3k+1)/2 монет. (37+1)/2=1094<2014, следовательно, за 7 взвешиваний мы не можем определить какая монета фальшивая.

Покажем как за 8 взвешиваний определить фальшивую монета.

Предположим, что изначально мы знаем легче или тяжелее фальшивая монета, чем остальные. Понятно, что при любом взвешивании, мы будем на чаши весов класть по одинаковому количеству монет, иначе мы не получим никакой полезной информации после взвешивания. Любое взвешивание разбивает множество монет на 3 множества (монеты на левой и на правой чашах и те которые не участвовали при взвешивании). Множество монет, которые не участвовали во взвешивании всегда не меньше множества монет которые лежат на одной чаше весов. И после любого взвешивания однозначно определяется множество, содержащее фальшивую монету. То есть, если изначально у нас было N монет, то после взвешивания остается не более $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$ подозрительных монет ($\lceil x \rceil$ – целая верхняя часть от числа x). Так как мы не знаем легче или тяжелее фальшивая монета, то в самом плохом случае после одного взвешивания подозрительных монет останется больше чем $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$ (ситуация при которой весы не будут в равновесии. Без ограничения общности положим, что левая чаша перевесила правую). Тогда при следующем взвешивании мы меняем местами множество монет на левой чаше с множеством монет не участвовавших во взвешивании, (если в множестве монет не участвовавших во взвешивании монет больше на 1ну чем на левой чаше, то берем из этого множества на одну монету меньше, а ту монетку которую мы не взяли добавим в множество монет которое лежало на левой чаше) и проводим второе взвешивание. Если весы оказались в равновесии, то фальшивая монета тяжелее настоящей, и не участвовала во втором взвешивании, если левая чаша перевесила, то фальшивая монета на правой чаше, и она легче настоящей. Ситуация при которой правая чаша перевесила левую невозможна, так как тогда фальшивая монета в правой чаше, и из второго взвешивания она тяжелее настоящей, а из первого взвешивания легче настоящей. В итоге за 2 взвешивания в самом плохом случае остается не более $\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$ подозрительных

монет. Далее взвешивания будут проводиться по алгоритму, описанному в самом начале. Таким образом, необходимо и достаточно 8 взвешиваний.
Ответ: 8.

Комментарий

Эта задача оказалась самой сложной в первой части. Самым популярным был вариант Б. Видимо, только за такое количество взвешиваний многие смогли найти монету.

ЗНАНИКА

Электронная школа Знаника
http://znanika.ru