Волшебный сундучок

Всероссийский математический конкурс

Разбор задач шестой части заданий

7 класс

Задача №1

Можно ли с помощью измерений обычной линейкой обнаружить, что из стопки бумаги высотой 5 см, содержащей 500 листов, вынули: 1) ровно 1 лист; б) ровно 10 листов; 3) четверть стопки (с точностью до 10 листов)?

Решение

Из условия вытекает, что толщина одного листа равна 5 см:500 = 0,01 см, то есть 0,1 мм, что нельзя измерить с помощью обычной линейки. Поэтому измерение любого количества листов с точностью до 1 листа невозможно.

Четверть стопки, то есть 125 листов имеет толщину 12,5 мм, а 10 листов — 0,1 мм·10 = 1 мм. Поэтому уменьшение толщины стопки на 12,5 мм с точностью до 1 мм с помощью измерений обычной линейкой обнаружить можно.

Ответ: 1) Нет; 2) нет; 3) да.

Комментарий

В этой задаче практически все верно посчитали толщину листа, но верные выводы сделало меньшинство. С пунктом 1) справились почти все. Школьники отлично знают, что деление на обычной линейке равно 1 мм, а значит с ее помощью пропажу 1 листа толщиной 0,1 мм никак не обнаружить. А вот в пункте 2) у многих возникли сложности. Почти все считали, что 10 листов имеют толщину 1 мм, поэтому на первый взгляд кажется, что их пропажу можно обнаружить, но мало кто догадался, что пропажу 10 листов мы никак не сможем отличить от, например, пропажи, 11 листов, а у нас спрашивается, можем ли мы обнаружить, что вынули ровно 10 листов, а не сам факт, что из стопки что-то убрали. Хотя указанная в 3) пункте точность измерений могла натолкнуть на мысль, что обычной линейкой мы не сможем определить пропажу точного числа листов. С пунктом 3) опять справились почти все.

Отдельно стоит отметить работы, в которых были указаны только ответы можно или нет без объяснений. Этого было не достаточно. Во всех подобных задачах следует обосновывать, почему что-то сделать нельзя или, если можно, приводить способ.

Задача №2

Квадратный лист бумаги сложили по линии, параллельной одной из границ листа, на две равные части, а потом ещё раз по линии, параллельной одной из границ образовавшихся частей, на две равные части. Затем образовавшийся кусок бумаги разрезали по прямой. Сколько частей могло образоваться при этом?

Решение

При указанном в задаче сложении квадратного листа бумаги может получиться кусок прямоугольной формы, состоящий из четырёх слоёв или кусок квадратной формы.

На рисунке 1 изображён квадратный лист бумаги, на котором вертикальные тонкие линии изображают линии сгиба, а штриховые линии — линии разреза бумаги. На рисунке 2 изображён квадратный лист бумаги, на котором штриховыми линиями отмечены линии, по которым разрезается бумага.

В обоих случаях могут получиться 2, или 3, или 4 части, или 5 частей в зависимости от направления разреза.

Так как в первом случае линии разреза в каждой четверти листа между двумя соседними линиями сгиба попарно симметричны, то не могло образоваться более 5 частей.

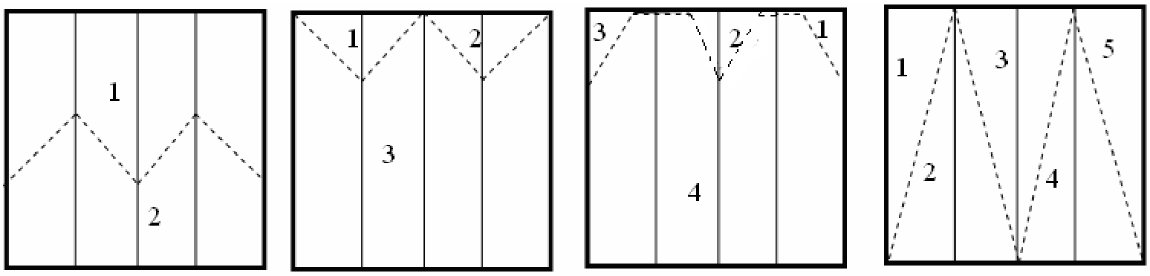


Рис. 1

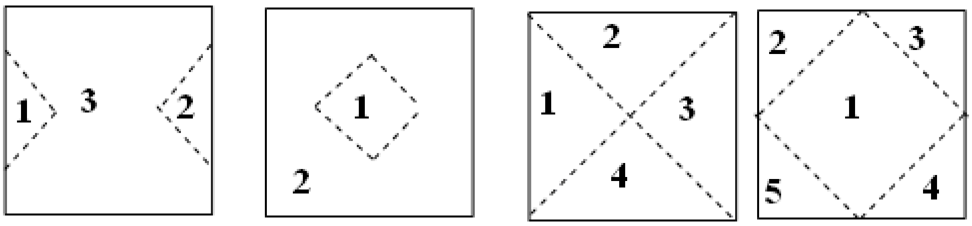


Рис. 2

Невозможность получения большего количества частей во втором случае следует из того, что след от разрезов симметричен относительно осей симметрии квадрата и его центра.

Ответ: От двух до пяти частей.

<u>Комментарий</u>

Ситуация с этой задачей аналогична 5-му и 6-му классам. (В 5-м была эта же задача, но указывалась, что 2 раза складываем по параллельным сгибам, а в 6-м, что получается квадрат). Здесь же нужно было рассматривать оба случая, но на типичные ошибки это не повлияло.

Верных решений в этой задаче было очень мало. Большинство находили не все случаи. Пропускали самые разные: кто-то указывал один вариант и на этом останавливался, кто-то 2, кто-то 3. Чаще всего находили разрезания на 2 и 5 частей. В некоторых работах школьники указывали только ответ, но не приводили способ, как нужно резать, чтобы получить указанное количество частей. И почти никто из получивших все возможные варианты, не смог объяснить, почему других не бывает.

В таких задачах, важно научиться грамотно организовать перебор вариантов. На первый взгляд кажется, что вариантов разрезать лист бесконечное количество. Важно понять, какие варианты отличаются друг от друга, а какие на самом деле одинаковые, т.е. никак не влияют на количество получившихся частей.

<u>Задача №3</u>

По окружности расположено n кружочков, занумерованных числами 1, 2, …, n. Будем закрашивать кружочки, начиная с кружочка с номером 2, через один незакрашенный кружочек (кружочки с номерами 2, 4, 6, …) до тех пор, пока останется один незакрашенный. Каков его номер при n, равном: 1) 261; 2) 520?

Решение

Если кружочков было бы $256 = 2^8$ или $512 = 2^9$, то незакрашенным остался бы кружочек с номером 1. При каждом прохождении окружности количество незакрашенных кружочков уменьшается вдвое и оставшиеся кружочки разбиваются на пары. Так как в паре закрашивается второй кружочек, то кружочек с номером 1 никогда не будет закрашен.

Если кружочков $261 = 256 + 5$, то, закрасив 5 кружочков с номерами 2, 4, 6, 8, 10, получим 256 незакрашенных кружочков, и первым из них будет кружочек с номером 11. Он и останется после всех закрашиваний.

Если кружочков $520 = 512 + 8 = 2^9 + 8$, то, закрасив 8 кружочков с номерами 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, получим 512 незакрашенных кружочков, и первым среди них будет кружочек с номером 17. Он и будет последний незакрашенный.

Ответ: 1) 11; 2) 17.

<u>Комментарий</u>

Эта задача оказалась самой трудной в олимпиаде, верных решений было крайне мало. Чаще всего возникала путаница с пониманием, как именно закрашиваются кружочки, почему то большинство школьников не смогли внимательно прочитать условие и закрашивали через один кружочек, а не через один незакрашенный. Соответственно в первом пункте они получали ответ 261. Во втором же пункте был разброс вариантов, кто-то писал, что останутся незакрашенными все нечетные, кто-то, что ответ 519 (видимо как самый большой номер среди нечетных). Мало кто из школьников приводил внятные объяснения, откуда берутся эти ответы.

Некоторые пытались найти закономерность при меньшем числе кружков. Сам этот подход имеет место на существование, но нужно четко понимать, почему найденная закономерность будет выполняться для всех чисел. Здесь же встречались варианты, что если для 7 кружков последний незакрашенный 7, то и для любого нечетного числа так будет. (На самом деле, мы видим, что это не так). В одной из работ школьник нашел закономерность, что для нечетного числа кружков на каждом круге первый закрашиваемый кружок сдвигается к середине по порядку, а для каждого четного мы всегда пропускаем 1. Эти закономерности тоже не верны.

<u>Задача №4</u>

Виталий закупает газеты по 4 зеда за номер, которые затем реализует по 5 зедов (зед — условная денежная единица). Если у него остаются нераспроданные газеты, то он их сдаёт на следующий день в киоск по 2 зеда за номер.

1) Какое количество проданных в первый день газет обеспечивает: а) неубыточность деятельности Виталия; б) прибыльность его деятельности?
2) На сколько процентов нужно увеличить цену реализации газет, чтобы продажа половины закупленных по цене 4 зеда газет обеспечивала прибыльность деятельности Виталия?

Решение

1) Пусть Виталий закупает ежедневно x газет, а продаёт в тот же день y ($y \le x$) газет. Тогда на следующий день он сдаёт в киоск x – y газет. Его расходы составляют 4x (зедов), а получает он $5y + 2(x - y) = 3y + 2x$ (зедов).
   a. Деятельность Виталия будет неубыточной, если доходы не меньше расходов, то есть если $3y + 2x \ge 4x$, или $y \ge \frac{2}{3}x$. Следовательно, Виталий должен продавать по цене 5 зедов не менее $\frac{2}{3}$ купленных газет.
   b. Деятельность Виталия будет прибыльной, если его доходы превышают расходы, то есть если $y > \frac{2}{3}x$. Следовательно, Виталий должен продавать по цене 5 зедов более $\frac{2}{3}$ купленных газет.
2) Пусть по-прежнему Виталий закупает ежедневно x газет, а продаёт их по цене a зедов за номер. Его расходы составляют 4x (зедов), а получает он при продаже половины закупленных газет $a\cdot\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}$ (зедов). Прибыльной будет деятельность Виталия, если $4x < a\cdot\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}$, или $a > 6$. Следовательно, цену реализации нужно увеличить более чем на 6 – 5 = 1 (зеда) или более чем на $\frac{1}{5}\cdot 100\% = 20\%$.

Ответ: 1) а) Не менее $\frac{2}{3}$ закупаемых газет; б) более $\frac{2}{3}$ закупаемых газет. 2) Более 20%.

<u>**Комментарий**</u>

В этой задаче тоже было очень много неверных решений. Во первых, даже при верно составленных и решенных уравнениях, школьники путаются в формулировках «не более», «не менее», «равно». В первом пункте многие выписывают ответ 2/3 от проданных газет, а не «не менее 2/3».

Во вторых, как и во многих предыдущих задачах, школьники часто указывают ответ без каких-либо объяснений, а этого не достаточно.

В третьих, школьники забывают про то, что непроданные газеты можно сдать на следующий день, отсюда берутся ответы «более 4/5» в пункте Б и «более 40%» в пункте В.

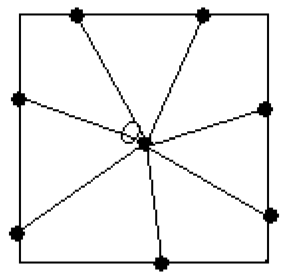
Кроме этого, некоторые школьники решают задачу для конкретного числа газет, что тоже приводит к разным неверным ответам.

8 класс

Задача №1

Торт, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, сверху и с боков равномерно покрыт шоколадной глазурью. Как разрезать этот торт на 7 частей с одинаковой массой глазури на каждом?

Решение



Если разделить границу квадрата на 7 равных по длине частей и соединить эти точки с центром квадрата O, то квадрат разобьётся на треугольники и, быть может, на четырёхугольники, площади которых равны. Площадь каждого треугольника равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{4a}{7}=\frac{a^2}{7}$, где a — сторона квадрата.

Если разбить четырёхугольник на два треугольника диагональю, соединяющей центр квадрата с вершиной квадрата, то можно показать, что площадь четырёхугольника также равна $\frac{a^2}{7}$.

Площади участков боковой поверхности торта, соответствующие частям, образованным по краям верхнего основания, также равны. Доказательство аналогично предыдущему.

Учитывая, что толщина шоколадной глазури мала, то, в соответствии с точностью измерений длин на поверхности торта, можно считать, что массы глазури на боковой поверхности торта тоже равны.

Приведенный способ деления торта обеспечивает и равенство масс кусков, то есть полную справедливость деления.

Комментарий

Больше половины участников не приводили никакого решения этой задачи. Из тех, кто приводил, целиком верных решений было крайне мало. Во многих работах указывался верный способ разрезания без доказательства, что площади глазури на всех кусках при указанном разрезании равны. Почему-то школьники часто решали, что торт имеет форму куба, в данном случае, это никак не влияло на доказательство, но такое решение нельзя считать полностью верным.

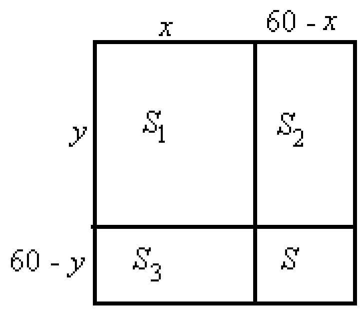
Кроме этого часто в работах был нарисован способ разрезания, но никаких пояснений к нему не было (по картинке похоже, что разрезы от центра, и что граница разбита на равные по длине части), но без пояснений такие картинки оценивались в небольшое количество баллов.

Задача №2

Участок квадратной формы разделили на четыре участка прямоугольной формы, имеющих общую угловую точку. Площади трёх из них относятся как 1:2:3. Найдите площадь четвёртого участка, если длина забора вокруг всего участка равна 240 м и известно, что четвёртый участок имеет наименьшую площадь из всех 4-х частей.

Решение

Обозначим через x и y ($y \geq x$) размеры участка наибольшей площади. Данный участок и его разбиение на 4 прямоугольные части, соответствующие условию, изображены на рисунке. Так как периметр участка равен 240 м, то сторона квадрата на рисунке равна 60 м.



Наименьшую площадь S имеет прямоугольник, не имеющий общей стороны с прямоугольником, имеющим наибольшую площадь.

Из условия и введенных обозначений следуют следующие равенства:

$S_1 = 2S_2$, $S_1 = 3S_3$, $S_1 = xy$, $S_2 = y(60 - x)$, $S_3 = x(60 - y)$.

Следовательно, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 2y(60-x), \\ xy = 3x(60-y) \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 2(60-x), \\ y = 3(60-y) \end{cases} \text{или} \begin{cases} 3x = 120, \\ 4y = 180 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 40, \\ y = 45. \end{cases}$$

Искомая площадь равна $S = (60 - 40)(60 - 45) = 300$ (м^2).

Случай второй:

$S1 = 2S2$, $S1 = 3S$, $S1 = xy$, $S2 = y(60 - x)$, $S = (60 - x)(60 - y)$.

Аналогично составляем систему уравнений. Решая систему уравнений, получаем $S = (60 - 40)(60 - 36) = 480$ (м^2).

Случай третий:

$S2 = 2S3$, $S2 = 3S$, $S2 = y(60 - x)$, $S3 = x(60 - y)$, $S = (60 - x)(60 - y)$.

Аналогично составляем систему уравнений. Решая систему уравнений, получаем $S = (60 - 45)(60 - 36) = 360$ (м^2).

Ответ: 300 м^2, 360 (м^2), 480 (м^2).

Комментарий

В этой задаче практически не было верных решений. Обычно школьники составляли одну возможную систему уравнений и решали ее, соответственно получалась либо площадь 300 м^2, либо 360 м^2, реже 480 м^2.

Кроме этого, очень многие почему-то не верно читали условие и считали, что все площади относятся как 1:2:3:4, а отсюда получали ответ, что площадь самой меньшей части 360, тем самым получая один из возможных верных ответов.

Так же в этой задаче часто встречались ошибки в вычислениях.

Как всегда, во многих работах указывался только ответ без объяснения, откуда он был получен. В очередной раз отметим, что только ответа было не достаточно.

Задача №3

В классе часть учеников изучает английский язык, часть — французский. Изучающих английский язык в два раза больше изучающих французский. Девочек, изучающих английский язык, столько же, сколько всего мальчиков в классе, а вместе девочек, изучающих английский язык, и мальчиков, изучающих французский язык, в два раза больше, чем всех остальных. Сколько в классе мальчиков, если количество учеников в классе не меньше 20, но не больше 30?

Решение

Обозначим через $a_м$ и $a_д$ количества соответственно мальчиков и девочек в классе, изучающих английский язык, а через $f_м$ и $f_д$ — количества соответственно мальчиков и девочек в классе, изучающих французский язык.

Из условия задачи следуют равенства:

$a_м + a_д = 2(f_м + f_д)$, $a_д = a_м + f_м$, $f_м + a_д = 2(a_м + f_д)$.

Если в третье равенство подставить выражение для $a_д$ из второго и преобразовать полученное равенство, то будем иметь:

$a_м + 2f_м = 2f_д + 2a_м$ или $2f_м = 2f_д + a_м$.

Если полученное равенство сложить почленно с первым равенством и преобразовать его, то придём к следующему равенству:

$a_д = 4f_д$.

Следовательно, количество девочек, равное $a_д + f_д = 5f_д$, делится на 5.

Рассматривая все возможные значения количества девочек в классе, найдём, пользуясь приведенными равенствами, соответствующие количества учащихся в классе.

$a_д + f_д$	$a_д$	$f_д$	$a_м + f_м$	Количество учеников
5	4	1	4	9
10	8	2	8	18
15	12	3	12	27
20	16	4	16	36

Так как количество учеников в классе не меньше 20, но не больше 30, то количество девочек в классе может равняться только 15. Тогда значения $a_д = 12$, $f_д = 3$, $a_м = 6$, $f_м = 6$ удовлетворяют всем условиям задачи. В классе 12 мальчиков.

Ответ: 12 мальчиков.

Комментарий

Эта задача оказалась самой легкой во второй части, многие с ней справились. Но нашлись те, кто отвечал хоть и верно, но на другой вопрос: «Сколько всего учеников в классе?» В некоторых работах школьники правильно определяли общее число учеников в классе, но делали не правильный вывод, сколько из них мальчиков. (Часто получалось 9).

Встречались и другие не верные ответы, они все получались из неких предположений, которых не было в условии задачи (например, что общее число школьников в классе 25), при этом выполнимость всех условий не проверялась.

Так же часто встречались только ответы без объяснений, либо приводилось количество мальчиков и девочек, изучающие каждый язык, но без доказательства, почему не бывает другой разбивки, удовлетворяющей условию.

Задача №4

По окружности расположено n кружочков, занумерованных числами 1, 2, …, n. Будем закрашивать кружочки, начиная с кружочка с номером 2, через один незакрашенный кружочек (кружочки с номерами 2, 4, 6, …) до тех пор, пока останется один незакрашенный. Каков его номер?

Решение

Если $n = 2^k$, то останется незакрашенным кружочек с номером 1. Это следует из того, что обход по окружности приводит к закрашиванию половины кружочков. При этом закрашенным будет кружочек, стоящий перед кружочком с номером 1. После первого обхода количество незакрашенных кружочков будет равняться 2^{k-1}. Продолжая этот процесс, придём к паре незакрашенных кружочков, в которой первым будет кружочек с номером 1.

Если $n = 2^k + p$, где $0 < p < 2^k$, то последним незакрашенным останется кружочек с номером $2p + 1$. Чтобы доказать это, закрасим p кружочков (2, 4, 6, …, $2p$) по правилу, указанному в условии. Вдоль окружности незакрашенными останется 2^k кружочков. Первым после незакрашенных будет кружочек с номером $2p + 1$. Он и останется незакрашенным после выполнения всех закрашиваний.

Ответ: 2p + 1, если n = 2k + p, где 0 ≤ p < 2k.

Комментарий

Эта задача оказалась самой сложной во всей олимпиаде. Верных решений практически не было. Чаще всего возникала путаница с пониманием, как именно закрашиваются кружочки, почему то большинство школьников не смогли внимательно прочитать условие и закрашивали через один кружочек, а не через один незакрашенный.

Большинство школьников писали, что при четном и нечетном n будут разные варианты. Чаще всего указывался вариант, что при четном n будет оставаться кружочек с номером 1, а при нечетном с номером n. Мало кто из школьников приводил объяснения, откуда берутся эти ответы.

Некоторые пытались найти закономерность на маленьком числе кружков, но мало кто смог эту закономерность обнаружить.

Так же в некоторых работах школьники давали ответ только для конкретного числа кружочков. Например, для 4 или 19, не пытаясь найти общее решение.

9 класс

Задача №1

Катер проплыл 60 км по течению реки и 48 км против течения, затратив на весь путь 6 ч. Найдите отношение собственной скорости катера к скорости течения, если эти скорости выражаются целыми значениями км/ч.

Решение

Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера, y (км/ч) — скорость течения. Тогда, по условию, $\frac{60}{x+y}+\frac{48}{x-y}=6$ или $\frac{10}{x+y}+\frac{8}{x-y}=1$. Так как в последнем равенстве оба слагаемые в левой части положительны, то приведенное уравнение имеет решение, если одно из этих слагаемых не меньше $\frac{1}{2}$, а другое — не больше $\frac{1}{2}$. Эти условия выполняются, если $x + y \geq 20$, а $8 < x - y \leq 16$ или $10 < x + y \leq 20$, а $x - y \geq 16$. В первом случае из свойств неравенств получаем: $y \geq 2$, а во втором — $y \leq 2$. Если $y = 2$, то уравнение принимает следующий вид: $\frac{10}{x+2}+\frac{8}{x-2}=1$ или $x^2 = 18x$. Условию задания удовлетворяет корень $x = 18$.

Значения $y = a$, где $a > 2$, приводят к уравнению $\frac{10}{x+a}+\frac{8}{x-a}=1$ или к уравнению $x^2 - 18x - 1 + 2a - a^2 = 0$, которое целых решений не имеет. Точно так же, если $y = 1$, то уравнение не имеет целых решений. Итак, искомое отношение равно 18:2 = 9:1.

Ответ: 9:1.

Комментарий

С этой задачей справилось около трети участников. Радует, что большинство верных ответов были подкреплены решениями.

Получение неправильных ответов чаще всего было связано с ошибками в вычислениях. Кто-то неверно сократил дробь, кто-то посчитал, что если сумма двух слагаемых равна 0, то и каждое из слагаемых должно быть равно 0 (видимо, школьник забыл про существование отрицательных чисел).

Стоит отметить несколько решений, в которых школьники перебирают различные целочисленные значения скоростей, но не проверяют, что эти скорости должны соответствовать всем условиям задачи, поэтому получают не только верный ответ, но и несколько побочных не верных. Кроме этого, в некоторых работах участники отвечают не на тот вопрос. Например, они находят скорость катера. Нужно внимательно читать условие и вопрос задачи.

Задача №2

Вокруг территории склада, имеющего форму выпуклого шестиугольника, вспахали заградительную полосу шириной 2 м. Какова площадь этой полосы, если длина ограды территории склада 450 м?

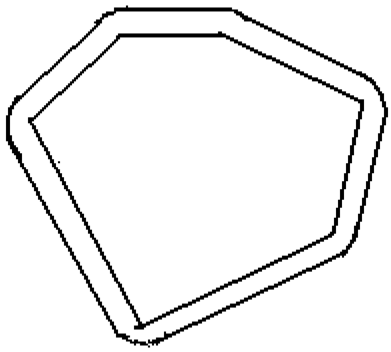


Рис. 1

Решение

Изобразим территорию склада в виде шестиугольника. Тогда изображением заградительной полосы будет множество точек вне шестиугольника, удалённых от шестиугольника на расстояние не более 2 м (см. рис. 1).

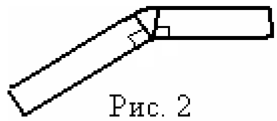


Рис. 2

Это множество состоит из прямоугольников, измерения которых равны 2 м, и длинам соответствующих сторон шестиугольника и секторов круга с радиусом 2 м, центральные углы которых дополняют соответствующие углы шестиугольника до 180° (см. рис. 2).

Обозначим углы шестиугольника через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$. Тогда $180° - \beta_1 + 180° - \beta_2 + \ldots + 180° - \beta_6 = 6\cdot180° - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6.) = 6\cdot180° - (6-2)180° = 360°$.

Следовательно, указанные секторы вместе составляют круг.

Искомая площадь S определяется формулой $S = 2p + \pi r^2$, где p — периметр шестиугольника. Итак, $S \approx 913$ м².

Ответ: ≈ 913 м².

Комментарий

Очень многие школьники, получившие верный ответ в этой задаче решали ее для склада, представляющего из себя правильный шестиугольник, хотя в условии было дано только то, что он выпуклый. В данном случае, на ответ это не повлияло, но в таких решениях стоило привести объяснения, почему площадь полосы неправильного шестиугольника будет такой же, как и для правильного.

Самым распространенным неправильным ответом был 900 (450*2). Школьники просто не учитывали те куски полосы, которые представляют из себя сектора круга. Были так же и такие работы, в которых участники не смогли понять, что из себя представляют эти куски на углах шестиугольника, отсюда получались разные неверные ответы.

Задача №3

Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали упаковываются в ящики трёх видов: по 70, 40 или 25 деталей в каждом. Стоимость пересылки одного ящика соответственно 500, 250 или 175 зедов (зед — условная денежная единица). Сколько ящиков и какого вида должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Решение

Стоимости пересылки одной детали в ящиках соответственно составляют $\frac{50}{7}, \frac{25}{4}, 7$ зедов. Поскольку $\frac{25}{4} < 7 < \frac{50}{7}$, то выгоднее всего пересылать детали в ящиках по 40 штук, менее выгодно — по 25 штук и ещё менее выгодно упаковывать детали в ящики по 70 штук. Но в ящики по 40 штук нельзя упаковать без недогрузки 1100 деталей, поэтому приходится искать наибольшее количество деталей, которые можно переслать в ящиках по 40 штук. Это количество следует искать среди чисел, близких к 1100 и кратных 40, то есть среди чисел 1080, 1040, 1000, … Из последовательности 1080, 1040, 1000, … первым числом, которое нам подходит, является число 1000, так как в этом случае остаётся 100 деталей, которые можно разместить в четырёх ящиках по 25 штук.

Итак, выгоднее всего взять 25 ящиков по 40 деталей в каждом и 4 ящика по 25 деталей.

Ответ: 25 ящиков по 40 деталей в каждом и 4 ящика по 25 деталей.

Комментарий

Эта задача оказалась самой легкой во втором блоке, тем не менее справились с ней только около половины участников. Как всегда, нашлись работы, в которых школьники указывали только верный ответ без каких-либо пояснений. Часто в качестве ответа указывалась сумма в 6950 зед (это минимальная стоимость пересылки). Очевидно, что получив минимальную стоимость, школьники знали, сколько и каких ящиков нужно использовать для пересылки, но все равно отвечали не на тот вопрос.

Было много работ, в которых перебирались различные комбинации ящиков, в которых можно было переслать детали, для каждой из них считалась стоимость пересылки, и выбирался самый дешевый вариант. Почти везде перебор был не полный, поэтому даже если получался верный ответ, такое решение нельзя засчитать за верное. Часто верного ответа вовсе не было среди рассматриваемых, поэтому и самую оптимальную пересылку найти не удавалось.

Так же в некоторых работах школьники игнорировали условие, что недогрузка ящиков не допускается, соответственно они тоже получали не верный ответ.

Задача №4

Какое наименьшее количество одинаковых монет нужно иметь, чтобы полностью покрыть ими квадрат, сторона которого вдвое больше диаметра монеты?

Решение

Выберем половину диаметра монеты за единицу измерения. Задача сводится к покрытию квадрата со стороной 4 см кругами, диаметры которых равны 2 см.

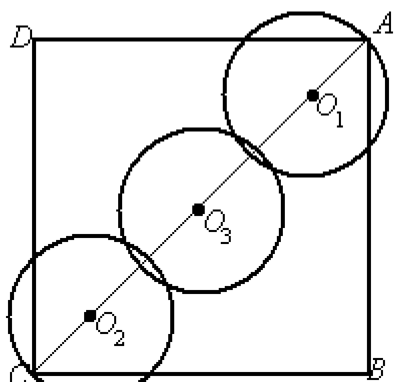


Рис. 1

На рис. 1 изображено покрытие диагонали квадрата со стороной 4 см тремя кругами, радиусы которых 1 см, а центры O_1, O_2, O_3 расположены так, что $AO_1 = 1$, $CO_2 = 1$, $AO_3 = CO_3$.

Так как длина диагонали квадрата $AC = \sqrt{2}\cdot 4 < 6$, то указанные круги покрывают диагональ.

Рассмотрим теперь отрезок MN, где M — точка пересечения одного из построенных кругов со стороной AD, N — точка пересечения другого со стороной DC (рис. 2).

По построению, $AM = CN = \sqrt{2}$. Тогда $MD = ND = 4 - \sqrt{2}$ (см), а $MN = \sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) < 4$ (см). Следовательно, круги с центрами в точках O_4 и O_5 ($NO_4 = 1$ см, $MO_5 = 1$ см) покрывают отрезок MN. Они также касаются диагонали AC в точках, являющихся концами радиусов кругов с центрами в точках O_1 и O_2. Следовательно, построенные круги покрывают трапецию $ACNM$.

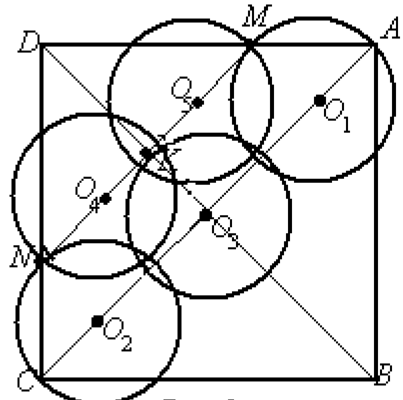


Рис. 2

Рассмотрим отрезок DK, где K — точка пересечения диагонали BD с отрезком MN (см. рис. 3). По построению, $DK = \dfrac{DM}{\sqrt{2}} = \dfrac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1 < 2$ (см). Следовательно, круг с центром в точке O_6 и с радиусом $DO_6 = 1$ (см) покрывает отрезок DK. Он вместе с кругами с центрами O_4 и O_5 покрывает треугольник MND. Это следует из того, что $DP < \sqrt{2}$ (см), где P — точка пересечения круга с центром в точке O_4 со стороной CD:

$$DP = DC - CN - PN = 4 - \sqrt{2} - \sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2} \text{ (см).}$$

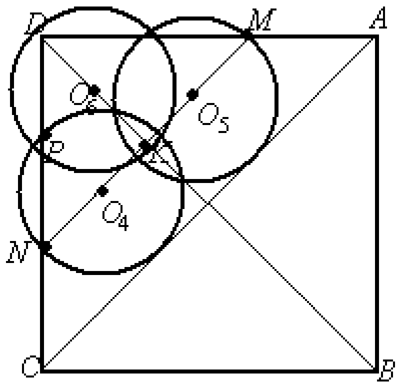


Рис. 3

Построив круги, симметричные кругам с центрами O_4, O_5 и O_6 относительно прямой AC, получим покрытие квадрата со стороной 4 см девятью кругами с диаметром 2 см.

Невозможность покрытия восемью кругами следует из приведенных соображений. Для покрытия треугольника MDN нужно не менее трёх кругов. Для покрытия диагонали требуется не менее трёх кругов. Следовательно, для покрытия квадрата требуется не менее 9 кругов.

Ответ: Девять.

Комментарий

С этой задачей не справился почти никто. Некоторые школьники догадались, что кругов нужно 9 и даже привели верный пример покрытия, но вот доказательство, почему квадрат невозможно покрыть меньшим количеством вызвало затруднения.

Очень многие приводили примеры покрытия на 10, 12 или 13 кружочков, до меньшего количества они не додумались.

Кроме этого, во многих работах были приведены оценки снизу с доказательством для 4, 5 или 6 кружочков. Доказательства были верными, но их было не достаточно. Некоторые даже приводили в работах покрытия для меньшего 9 числа кружочков, но все эти покрытия были не полными.

ЗНАНИКА