Волшебный сундучок

Всероссийский математический конкурс

Разбор задач второй части заданий

7 класс

1	2	3	4	5
В	Г	Б	Г	В

<u>Задача №1</u>

Один доллар можно продать в обменном пункте за 10 зедов (условная денежная единица), а купить — за 11 зедов. Стоимость продажи и покупки доллара увеличили на 10%. Сколько примерно долларов можно купить за 1000 зедов и за сколько примерно зедов можно продать 100 долларов? Выберите самый точный вариант.

А. 121; за 820. Б. 90; за 1210. **В. 82; за 1100.** Г. 121; за 1100.

Решение

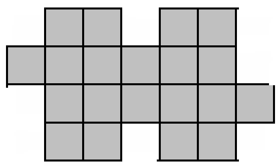
После изменения курса доллара один доллар можно было продать в обменном пункте за 11 зедов, а купить — за 12,1 зеда. Поэтому за 1000 зедов можно было купить $1000:12{,}1 \approx 82$ (доллара), а продать 100 долларов — за $100 \cdot 11 \approx 1100$ (зедов).

Ответ: В. 82; за 1100.

<u>Комментарий</u>

С этой задачей справилось большинство участников. Среди неправильных чаще всего указывался вариант Б. Его можно было получить, если перепутать покупку и продажу. (За 1210 зедов можно купить 100 долларов, а продав 90 долларов можно получить около 1000 зедов).

<u>Задача №2</u>



По дороге в школу ученик $\frac{3}{4}$ пути едет на трамвае, а остальную часть идёт пешком. На дорогу он обычно тратит 18 минут без учёта времени ожидания трамвая. Однажды из-за аварии трамваи не ходили, и ученик добрался до школы пешком за 48 минут, идя с обычной скоростью. Во сколько раз скорость движения трамвая больше скорости движения ученика пешком, если их движения считать равномерными?

А. В 9 раз. Б. В 8 раз. В. В 7 раз. **Г. В 6 раз.**

Решение

Обозначим через s расстояние от дома до школы, v1 — скорость движения трамвая, v2 — скорость движения ученика пешком. Тогда, по условию, имеем уравнения:

$$\frac{\frac{3}{4}s}{v_1} + \frac{\frac{1}{4}s}{v_2} = 18, \quad \frac{s}{v_2} = 48. \text{ Отсюда } \frac{s}{v_1} = 8. \text{ Но тогда } \frac{v_1}{v_2} = 6.$$

Ответ: Г. В 6 раз.

Комментарий

С этой задачей тоже справились почти все. Иногда встречались варианты Б и В, видимо школьники просто пытались угадать ответ, либо ошибались в вычислениях.

Задача №3

Каждый шестой автобус в автобусном парке оборудован информационным табло. Позднее информационные табло установили ещё на 5 автобусах из этого парка, и после этого четверть автобусов парка имела информационное табло. Сколько автобусов в парке, если каждый автобус оборудован всего одним табло?

А. 120. **Б. 60.** В. 48. Г. 42.

Решение

Обозначим количество автобусов в парке через x. Тогда информационным табло оборудовано $\frac{1}{6}x+5$ автобусов. Это составляет четверть всех автобусов в парке. Имеем уравнение: $\left(\frac{1}{6}x+5\right)\cdot 4=x$ или $\frac{1}{3}x=20$. Отсюда $x=60$.

Ответ: Б. 60.

Комментарий

И вновь почти все ответы верные. Все неверные варианты ответов так же встречались в работах, но понять, как они были получены сложно.

Задача №4

В классе, в котором 32 ученика, каждый посещает хотя бы один из трёх факультативов. При этом факультатив по математике посещают 14 учащихся, по биологии — 18, по физике — 16. Некоторые из учащихся посещают несколько факультативов. Пятеро посещают факультативы по математике и биологии, семеро — по математике и физике, а шестеро — по биологии и физике. Сколько учеников посещает все три факультатива?

А. 6. Б. 4. В. 3. **Г. 2.**

Решение

Если сложить количества учащихся, посещающих факультативы по математике, биологии и физике, то получим 14 + 18 + 16 = 48 – число, большее количества учеников в классе. Это произошло потому, что количества учеников, посещающих два факультатива, мы сложили дважды. Нужно это количество вычесть из полученной суммы. Два факультатива посещают 5 + 7 + 6 = 18 (учащихся). Если это число вычесть из 48, то получим 30 – число, меньшее количества учащихся в классе. Это произошло потому, что количества учеников, посещающих три факультатива, мы трижды прибавили и трижды вычли, то есть ни разу не учли в выражении 14 + 18 + 16 – 5 – 7 – 6 = 30. Следовательно, три факультатива посещают 32 – 30 = 2 (ученика).

Ответ: Г. 2.

Комментарий

В отличие от шестого класса, где с подобной задачей справилось всего около трети учеников, с этой задачей опять справилось большинство. (Хотя если здесь рассуждать по неправильной логике, приведенной в решении за 6-й класс и составить уравнение, получается, что число школьников, посещающих все 3 факультатива должно быть отрицательным, поэтому если кто-то и пытался так решать задачу, сразу становилось понятно, что ответ не верный). Все варианты неправильных ответов так же встречались в работах примерно поровну, как они получались не ясно.

Задача №5

Сыр первого, второго и третьего сорта соответственно стоит 80 зедов, 60 зедов и 40 зедов за килограмм (зед – условная денежная единица). Какую наибольшую массу сыра можно купить за 124 зеда, если сыра первого сорта должно быть не менее, чем в полтора раза больше, чем второго, а сыра второго сорта должно быть не менее, чем в полтора раза больше, чем третьего?

А. 1 кг 400 г. Б. 1 кг 600 г. В. 1 кг 900 г. Г. 2 кг 400 г.

Решение

Если обозначить через x, y, z массы всех купленных сыров соответственно по 40 зедов, 60 зедов и 80 зедов за килограмм, то, по условию, $40x + 60y + 80z = 124$.

Чем больше более дешёвого сыра купим, тем больше будет масса купленного сыра. Но по условию $y \geq 1{,}5x$, $z \geq 1{,}5y \geq 2{,}25x$. Следовательно, если массы купленных сыров будут удовлетворять условиям $y = 1{,}5x$, $z = 2{,}25x$, то слагаемое $40x$ в приведенном равенстве примет наибольшее допустимое значение. Имеем:

$40x + 90x + 180x = 124$ или $310x = 124$, $x = 0{,}4$ (кг), тогда $y = 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6$ (кг), $z = 0{,}6 \cdot 1{,}5 = 0{,}9$ (кг). Следовательно, за 124 зеда можно купить 1 кг 900 г сыра.

Ответ: В. 1 кг 900 г.

Комментарий

И снова с задачей справилось больше половины школьников. Все остальные неправильные ответы встречались одинаково часто, как они были получены не ясно. Видимо школьники либо угадывали ответ, либо не верно составили или решили уравнение.

8 класс

1	2	3	4	5
Б	В	В	Г	А

Задача №1

Диаметр сечения вала колодца равен 32 см. Расстояние от вала до поверхности воды в колодце — 7 м. Сколько раз нужно повернуть ручку вала на 360°, чтобы вытащить из колодца ведро, зачерпнувшее немного воды?

А. 8 раз. **Б. 7 раз.** В. 6 раз. Г. 5 раз.

Решение

За один оборот ручки вала конец верёвки поднимается на расстояние, равное длине окружности сечения вала, то есть на $32 \cdot \pi \approx 100$ см. С глубины 7 м он поднимется за 7 оборотов.

Ответ: Б. 7 раз.

Комментарий

С задачей справились практически все участники.

Задача №2

За сколько примерно часов конец минутной стрелки проходит путь, превышающий длину этой стрелки в 125 раз? Выберите наиболее точное значение.

А. За 15 ч. Б. За 18 ч. **В. За 20 ч.** Г. За 24 ч.

Решение

За один час конец минутной стрелки проходит путь, равный $2\pi l$, где l — длина стрелки. Это скорость движения минутной стрелки, выраженная в единицах длины за час. Путь, равный $125l$, конец минутной стрелки преодолевает за $125l : 2\pi l \approx 20$ (ч).

Ответ: В. За 20 ч.

Комментарий

С этой задачей тоже справились почти все ученики. Все неверные ответы встречались в работах примерно с одинаковой частотой. Видимо школьники, не решившие задачу, просто пытались угадать ответ.

Задача №3

Робот начинает движение в некоторой точке, в начале движения он выбирает направление перемещения. Далее робот движется прямолинейно 10 м, затем поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м, далее снова поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м и т. д. Какое наименьшее количество поворотов мог сделать робот к тому моменту, когда он удалился от точки выхода на 30 м?

А. 2. Б. 3. **В. 4.** Г. 5.

Решение

Изобразим первое перемещение робота горизонтальным отрезком. Тогда дальнейшее движение робота будет проходить по сторонам квадратной сетки, изображённой на рисунке, со стороной 10 м. Точка О — начало движения.

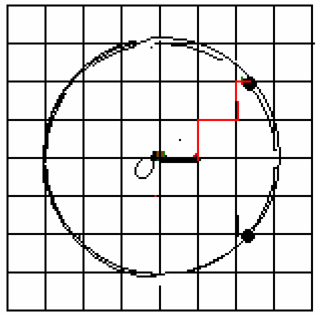


Рис.

На окружности с центром в точке О радиуса 30 м отмечены точки, в которых мог находиться робот после 4-х поворотов. После меньшего числа поворотов робот находится внутри круга, ограниченного указанной окружностью.

Ответ: В. 4.

Комментарий

И вновь больше половины ответов верные. В работах встречались все неверные ответы. Их можно было получить, если решить, что вместо расстояния от начала движения до конца берется путь (действительно, чтобы преодолеть путь в 30 м, необходимо пройти 3 участка по 10 м, то есть свернуть 2 раза – ответ А), либо посчитать начало движения за поворот, тогда получался ответ Г. Необходимо внимательно читать условие и отвечать на тот вопрос, который поставлен.

Задача №4

Все ученики класса посещают хотя бы один из трёх кружков, причём 12 человек посещают математический кружок, 10 — драматический и 9 — шахматный. Какое из приведенных количеств учеников может быть в классе, если по крайней мере два ученика посещают три кружка?

А. 31. Б. 29. В. 28. **Г. 27.**

Решение

Количество учеников в классе меньше суммы 10 + 12 + 9 = 31. При нахождении этой суммы трижды (вместо одного раза) учитывались два ученика, посещающих три кружка. Из числа 31 нужно вычесть число $2 \cdot 2 = 4$. Получим 27. Количество учеников в классе не превосходит 27. Из приведенных ответов только число 27 удовлетворяет этому условию. Заметим, что в классе может быть 27 учеников, если ни один ученик не посещает ровно два кружка.

Ответ: Г. 27.

Комментарий

Большая часть учеников с задачей справилась. Из неверных ответов лидирует вариант Б. Видимо школьники складывали количество учеников, посещающих каждый кружок и вычитали те двух школьников, которые посещают все 3 кружка, не учитывая, что они посчитаны не дважды, а трижды.

Задача №5

В городе есть гостиницы трёх типов. В каждой гостинице первого, второго и третьего типа имеются соответственно 17, 37 и 5 номеров высшего разряда. Всего в гостиницах города 123 номера высшего разряда. Найдите количество гостиниц третьего типа, зная, что их общее количество не превосходит 10.

А. 3. Б. 2. В. 1. Г. Невозможно определить.

Решение

Если x, y, z — количество гостиниц каждого типа соответственно, то из условия следует равенство $17x + 37y + 5z = 123$, откуда $y \le 3$.

При $y = 1$ получаем, что $17x + 5z = 86$. Этому уравнению удовлетворяет только одна пара чисел $x = 3$, $z = 7$. Но тогда $x + y + z = 11$, что противоречит условию.

При $y = 3$ получаем $17x + 5z = 12$. Не существует натуральных значений x и y, удовлетворяющих этому уравнению.

Наконец, при $y = 2$ получаем равенство $17x + 5z = 49$, откуда $x = 2$, $z = 3$, и следовательно, в городе было 2 гостиницы первого, 2 гостиницы второго и 3 гостиницы третьего типа.

Ответ: А. 3.

Комментарий

Многие с задачей справились. Среди неверных в основном указывались ответы Б и Г.

Хотелось бы напомнить, что ответ Г был бы верен только в том случае, если бы у задачи существовало несколько решений, удовлетворяющих всем условиям, и при этом в разных решениях встречалось бы разное количество гостиниц третьего типа, а не тогда, когда школьник решающий задачу сам не смог найти искомый ответ.

9 Класс

1	2	3	4	5
В	Б	Г	А	В

Задача №1

Увеличиваясь ежегодно на одно и то же количество процентов, зарплата работника за два года увеличилась на a%. Значением какого из приведённых выражений является ежегодный процент увеличения зарплаты?

А. $\left(\sqrt{1+\frac{a}{100}}-1\right)$. Б. $\left(\sqrt{1+\frac{a}{100}}+1\right)$. **В.** $\left(\sqrt{1+\frac{a}{100}}-1\right)\cdot 100$. Г. $\left(\sqrt{1+\frac{a}{100}}+1\right)\cdot 100$.

Решение

Обозначим через p количество процентов, на которое ежегодно увеличивалась зарплата, а через c — начальную зарплату. По условию, через год зарплата станет равной $c\left(1+\frac{p}{100}\right)$, а через два года зарплата будет равна $c\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$. Имеем уравнение: $c\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ = c(1 + $\frac{a}{100}$) или $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ = 1 + $\frac{a}{100}$. Отсюда p =$\left(\sqrt{1+\frac{a}{100}}-1\right)\cdot 100$ %.

Ответ: В. $\left(\sqrt{1+\frac{a}{100}}-1\right)\cdot 100$**%.**

Комментарий

С этой задачей справилось больше половины участников. Все неправильные ответы выбирали примерно с равной частотой. Скорее всего школьники пытались решить задачу в уме или угадать ответ, хотя, как мы видим, достаточно было взять и составить уравнение, решалось оно просто.

Задача №2

Рабочий может за один рабочий день изготовить 16 заготовок для деталей или 10 деталей из заготовок. Какое наибольшее количество заготовок может изготовить рабочий за день, чтобы из всех них изготовить детали в тот же день, если из каждой заготовки изготавливается одна деталь?

А. 5. **Б. 6.** В. 7. Г. 8.

Обозначим через a (ч) длительность рабочего дня рабочего. Тогда одну деталь из заготовки рабочий делает за $\frac{a}{10}$ ч, одну заготовку — за $\frac{a}{16}$ ч, заготовку и деталь из неё — за $\frac{a}{10}$ + $\frac{a}{16}$ = $\frac{13a}{80}$ (ч). Так как a: $\frac{13a}{80}$ = $6\frac{2}{13}$, то наибольшее количество заготовок, которое может изготовить рабочий за день так, чтобы из всех них изготовить детали в тот же день, равно 6.

Ответ: Б. 6.

Комментарий

И опять с задачей справилось больше половины школьников. Как были получены неверные ответы не ясно.

Задача №3

Четыре абитуриента А, Б, В, Г проходили тестирование по математике. Известно, что Б набрал больше баллов, чем А; В и А вместе набрали больше баллов, чем Б и Г вместе; Г и В вместе набрали столько же баллов, сколько А и Б вместе. Кто набрал больше всех баллов и кто меньше всех?

А. Б и Г. Б. В и А. В. Б и А. **Г. В и Г.**

Решение

Пусть а, б, в, г обозначают количества баллов, набранных соответственно абитуриентами А, Б, В, Г. Тогда, по условию: б > а, а + в > б + г, а + б = в + г.

Если сложить первые два из этих неравенств, то получим: а + в + б > а + б + г или в > г.

Сложив второе неравенство и равенство, получим: 2а + б + в > б + в + 2г, отсюда а > г. Тогда из равенства в + г = а + б вытекает, что б > г. Следовательно, в > б > а > г.

Ответ: Г. В и Г.

Комментарий

С задачей справились почти все участники. Все неправильные ответы так же встречались в работах, но скорее всего это ответы тех школьников, кто не смог придумать решение задачи.

Задача №4

Если Вы за 40 с спустились по неподвижному эскалатору, а за 60 с он поднял Вас, стоящего на эскалаторе, наверх, то сколько секунд понадобится Вам, чтобы спуститься вниз на эскалаторе, поднимающемуся вверх?

А. 120 с. Б. 115 с. В. 110 с. Г. 100 с.

Решение

Обозначим через x м расстояние от входа на стоящий эскалатор до выхода с него, vэ м/с — скорость движения эскалатора, v м/с — собственную скорость человека, движущегося по эскалатору. Тогда, по условию, $\frac{x}{v_э} = 60$, $\frac{x}{v} = 40$.

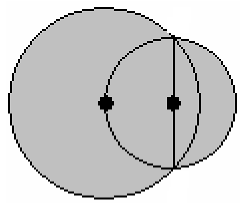
Искомое время равно $\frac{x}{v - v_э} = \dfrac{1}{\frac{v}{x} - \frac{v_э}{x}} = \dfrac{1}{\frac{1}{40} - \frac{1}{60}} = 120$ (с).

Ответ: А. 120 с.

Комментарий

Верно решили задачу около половины школьников. Среди неверных лидировал ответ Г, видимо школьники просто складывали время спуска по неподвижному эскалатору с временем, за которое эскалатор поднимает Вас на верх, что конечно же делать было нельзя.

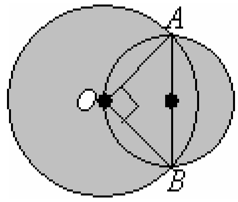
Задача №5



На столе лежат два тонких диска. Изображение их расположения показано на рисунке. Какую примерно площадь они занимают на столе, если радиус большего диска равен 25 см? Выберите наиболее точное значение.

А. 200 см2. Б. 150 см2. **В. 22 дм2.** Г. 20 дм2.

Решение



По условию, центр круга, изображающего меньший диск, лежит на хорде AB, соединяющей точки пересечения окружностей, изображающих контуры дисков, а окружность, изображающая контур меньшего диска, проходит через центр O круга, изображающего больший диск (см. рис.). Следовательно, AB — диаметр меньшего круга. По свойству вписанного в окружность угла $\angle AOB = 90°$ и по теореме Пифагора AB = $\sqrt{2}\cdot 25$ (см).

Искомая площадь S равна сумме половины площади меньшего круга, $\frac{3}{4}$ площади большего и площади треугольника AOB:

$$S = \frac{1}{2}\pi\frac{\left(\sqrt{2}\cdot 25\right)^2}{4} + \frac{3}{4}\pi\cdot 25^2 + \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 25 = \frac{\pi}{4}\cdot 25^2\cdot 4 + \frac{25^2}{2} \approx 22 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Ответ: В. 22 дм².

Комментарий

Эта задача оказалась одной из самых сложных в тестовом блоке, верно ответили на нее всего около трети участников. Хотя, помня одну только формулу для площади круга, можно было понять, что больший диск занимает по площади больше 1960 см²' (то есть больше 19 дм2), а значит варианты А и Б заведомо не могут быть верными.

ЗНАНИКА

Электронная школа Знаника

http://znanika.ru