Золотой ключик

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор задач из творческой части заданий

4-5 класс

Творческое задание

Выполни задания и запиши развёрнутое решение.

Задача №1 (7 балла)

Одиннадцать школьников купили всего 50 конфет. Верно ли, что среди них есть хотя бы двое, купившие одинаковое количество конфет?

Решение

Предположим, что все 11 школьников купили различное количество конфет. Самое меньшее они могли купить 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 конфет, что противоречит условию.

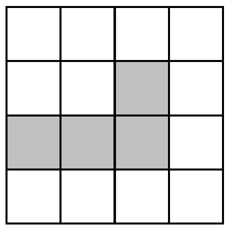
Ответ. Да.

Комментарий:

Задача на «принцип Дирихле». Практически всегда подобные задачи легко решаются методом «от противного». Предполагаем, что ответ «нет» и получаем противоречие. С этой задачей справились 60% участников.

Задача №2 (7 балла)

Разрежьте квадрат, изображённый на рисунке, на 4 части, составленные из квадратиков, так, чтобы все части были одинаковой формы и одинакового размера и в каждую часть попало ровно по одному закрашенному квадратику.



Решение

Два способа разрезания квадрата в соответствии с требованиями задания, представлены на рис. 1 и на рис. 2.

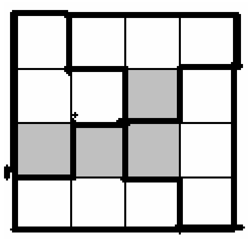


Рис. 1

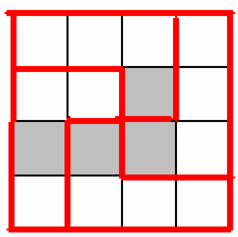


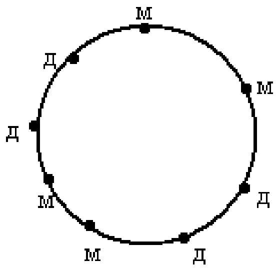
Рис. 2

Комментарий:

С этой задачей справились 73% участников. Тут нет стандартных способов решения, надо просто потратить какое-то время и попробовать построить подходящий пример.

<u>Задача №3 (7 балла)</u>

За круглым столом сидят 4 мальчика и 4 девочки. Обязательно ли у кого-то оба соседа — девочки?



Решение

Нет, соответствующее расположение см. на рисунке. Нет ни одного человека, сидящего между двумя девочками.

Ответ. Нет.

Комментарий:

62% участников справились с этой задачей. Задача не требует особых знаний и навыков, как и предыдущей задаче, тут необходимо было потратить какое-то время и попытаться построить пример.

<u>Задача №4 (7 балла)</u>

У мальчика есть 20 монет достоинством 1 руб., 2 руб. и 5 руб. Имеется ли среди них семь монет одинакового достоинства?

Решение

У мальчика монеты трёх типов. Если монет каждого типа не более шести, то всего монет не более $6 \cdot 3 = 18$, а их 20. Следовательно, среди этих монет имеется семь монет одинакового достоинства.

Ответ. Имеется.

Комментарий:

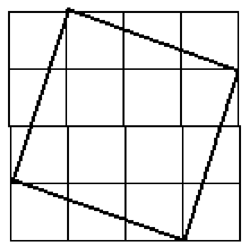
Эту задачу смогли решить 55% участников. Еще одна задача на «принцип Дирихле». Как и первая задача, она легко решается методом «от противного».

<u>Задача №5 (7 балла)</u>

Дан лист клетчатой бумаги 4x4. Соедините вершины некоторых квадратиков так, чтобы получился четырёхугольник, площадь которого была бы в 10 раз больше площади одного квадратика.

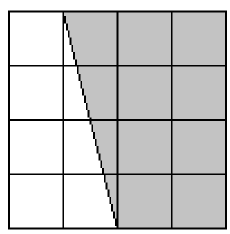
Решение

Построим четырёхугольник, как показано на рисунке.



Площадь полученного четырёхугольника равна сумме площадей 4-х квадратиков, находящихся внутри этого четырёхугольника, и 4-х треугольников, примыкающих к его сторонам. Площадь каждого этого треугольника равна половине площади прямоугольника, состоящего из 3-х квадратиков. Сумма площадей 4-х треугольников равна площади $3 \cdot 4 : 2 = 6$ квадратиков. Таким образом, площадь полученного четырёхугольника равна сумме площадей 10-и квадратиков.

Комментарий:



Эту задачу смогли решить 53% участников. В задаче надо было понять, что плошать листа равна 16, после чего достаточно было отрезать от листа фигуру площади 6 так, чтобы остался четырехугольник с вершинами в линиях сетки. Задача имеет несколько различных решений, самое часто встречающееся в работах участников решение выглядит как показано на рисунке.

<u>Задача №6 (7 балла)</u>

Земельный участок имеет форму квадрата. Одну сторону участка уменьшили на 4 м, а смежную увеличили на 6 м. Как изменилась площадь участка, если сторона квадрата равнялась: 1) 10 м; 2) 12 м; 3) 15 м?

Решение

1) Если сторона квадрата равна 10 м, то его площадь равна $10 \cdot 10 = 100$ м^2. После изменения его сторон образуется прямоугольник со сторонами 6 м и 16 м, его площадь равна $6 \cdot 16 = 96$ м^2. Площадь участка уменьшилась.

2) Если сторона квадрата равна 12 м, то его площадь равна $12 \cdot 12 = 144$ м^2. После изменения его сторон образуется прямоугольник со сторонами 8 м и 18 м, его площадь равна $8 \cdot 18 = 144$ м^2. Площадь участка не изменилась.

3) Если сторона квадрата равна 15 м, то его площадь равна $15 \cdot 15 = 225$ м^2. После изменения его сторон образуется прямоугольник со сторонами 11 м и 21 м, его площадь равна $11 \cdot 21 = 231$ м^2. Площадь участка увеличилась.

Ответ. 1) Уменьшилась; 2) не изменилась; 3) увеличилась.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить 60% участников. Для решения данной задачи необходимо было уметь считать площадь прямоугольника со сторонами a и b, $S = a \cdot b$.

<u>Задача №7 (7 балла)</u>

Николай с сыном и Пётр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 35 рыб. Сына Николая зовут Григорий. Как зовут сына Петра?

Решение

Из условия следует, что Николай с сыном поймали вместе чётное количество рыб. Если принять количество рыб, пойманных сыном Петра за 1 часть, то количество рыб, пойманных Петром, составит три части, а количество рыб, пойманных Петром и его сыном вместе, — четыре части. Поэтому Пётр с сыном вместе поймали чётное количество рыб. Так как сумма двух чётных чисел не может равняться 35, то мы приходим к выводу, что на рыбалке было не четыре человека, а три.

Так как сына Николая зовут Григорий, а отцами являются Николай и Пётр, то Пётр — отец Николая.

Ответ. Николай.

Комментарий:

55% участников справились с этим заданием. В этой задаче главное было понять, что на рыбалке было три человека, а не четыре. Если попытаться построить пример, то можно заметить, что четность количества рыб не позволяет распределить их на 4 человека так, чтобы выполнялись все условия задачи.

Задача №8 (7 балла)

Несколько фирм приняли участие в конкурсе дизайнерских работ. Каждая работа оценивалась баллами от 3 до 5. Фирма «АХ» получила на 10 баллов меньше суммы баллов остальных фирм. Фирма «УХ» получила на 8 баллов меньше суммы баллов остальных фирм, фирма «ОХ» — на 6 баллов меньше суммы баллов остальных фирм. Сколько фирм принимало участие в конкурсе и сколько баллов получила каждая из них?

Решение

Из условия ясно, что фирма «АХ» получила наименьшее количество баллов из трёх указанных фирм, фирма «УХ» получила больше баллов, чем «АХ», а фирма «ОХ» — больше баллов, чем «УХ». Так как все могли получить от 3-х до 5-и баллов, то фирма «АХ» получила три балла, «УХ» — четыре балла, «ОХ» — 5 баллов. Поскольку фирма «АХ» получила на 10 баллов меньше суммы баллов остальных фирм, то остальные фирмы получили 3 + 10 = 13 баллов, а все участники конкурса получили 13 + 3 = 16 баллов. Три названные фирмы получили вместе 3 + 4 + 5 = 12 баллов. Следовательно, участвовала ещё одна фирма, получившая 16 – 12 = 4 балла.

Ответ. 4 фирмы; 3 балла, 4 балла, 5 баллов, 4 балла.

Комментарий:

Лишь треть участников (34%) смогли решить данную задачу. Важно было понять, что в условии описаны неравенства, которые позволяют упорядочить фирмы «АХ», «УХ» и «ОХ» по количеству баллов. После этого количество фирм участников можно было просто подобрать.

Задача №9 (7 балла)

На пляже встретились 6 одноклассников, которые решили сыграть в пляжный волейбол двумя командами по 3 человека. Какое наименьшее количество игр нужно провести, чтобы каждый сыграл с каждым в одной команде?

Решение

Обозначим одноклассников числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. В следующей таблице представлены их разбиения на две команды, при которых каждый сыграл с каждым в одной команде.

1,2,3	1,2,4	1,2,5	1,2,6
4,5,6	3,5,6	3,4,6	3,4,5

Каждый столбец этой таблицы указывает на составы команд в одной игре. Понадобилось 4 игры. Это наименьшее количество.

Покажем, что за 3 игры невозможно добиться того, чтобы каждый сыграл с каждым в одной команде. Например, игрок 1 за 3 игры может сыграть с четырьмя одноклассниками по одному разу, а с одним — 2 раза. Пусть это будет, например, игрок 2. В тех двух играх, в которых он был в одной команде с игроком 1, он играл в одной команде с 3-мя одноклассниками. Остальные 2 одноклассника были в одной команде с игроком 1, когда там не участвовал игрок 2. С ними за 3 игры игрок 2 не мог оказаться в одной команде.

Ответ. 4.

Комментарий:

Только 21% участников смогли решить эту задачу. Решение задачи не очевидное и довольно сложно строго изложить словами. Многие смогли построить пример для четырех игр, но немногие смогли доказать, что за 3 игры условие выполнить невозможно.

<u>Задача №10 (7 балла)</u>

Вера, Надя и Люба во время прогулки в лесу нашли 14 кедровых орехов, причём Вера нашла вдвое меньше орехов, чем Надя, а Люба нашла орехов больше, чем Вера, но меньше, чем Надя. Сколько орехов нашла каждая из девочек?

Решение

Количество орехов, найденных Верой, примем за 1 часть, тогда количество орехов, найденных Надей, будет составлять 2 части, а количество орехов, найденных Любой, — больше 1-й части, но меньше 2-х частей. Поэтому число 14 — общее количество орехов, найденных девочками, — составляет больше 4-х частей, но меньше 5-и. Так как количество орехов, собранных каждой девочкой, выражается натуральным числом, то на одну часть может приходить только 3 ореха. Тогда 4 части — это 12 орехов, 5 частей — 15, число 14 находится между числами 12 и 15. Следовательно, Вера нашла 3 ореха, Надя — $3 \cdot 2 = 6$, а Люба — $14 - (3 + 6) = 5$.

Ответ. Вера — 3, Надя — 6, а Люба —5.

Комментарий:

Эту задачу решили 58% участников. Подобные задачи можно решать и простым перебором. Но важно помнить то, что ответ в задаче иногда может быть не один. И найдя ответ перебором, необходимо еще суметь доказать, что он единственный возможный. Иначе решение не будет полным.

Разбор задач из тестовой части заданий

6-7 класс

Творческое задание

Выполни задания и запиши развёрнутое решение.

Задача №1 (7 балла)

В денежной системе некоторого государства имеются купюры по 1, 3, 5, 25, 50 и 100 зедов. Можно ли при обмене в банке 50-зедовых и 100-зедовых купюр получить 2017 купюр достоинством 1, 3, 5 и 25 зедов?

Решение

Купюры достоинством 1, 3, 5 и 25 зедов нечётного достоинства, их количество 2017 также нечётно.

Так как общее количество купюр достоинством 1. 3, 5 и 25 зедов нечётно, то нечётно количество либо одного, либо трёх видов этих купюр. Сумма денег купюрами 1, 3, 5 и 25 зедов выражается нечётным числом рублей, поскольку сумма 4-х слагаемых, среди которых либо только одно нечётно, либо ровно три нечётных, есть число нечётное. Поэтому при обмене в банке 50-зедовых и 100-зедовых купюр (их достоинство чётно) нельзя получить заданное количество указанных купюр.

Ответ. Нет.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить только 24% участников. Задача на инвариант – некоторое свойство, которое не изменяется при преобразованиях определенного типа. В данном случае инвариантом является четность. Сумма 50-зедовых и 100-зедовых купюр всегда четна, в то время как четность 2017 купюр достоинством 1, 3, 5 и 25 зедов всегда нечетна. Задачи подобного рода обычно не решаются перебором или простыми вычислениями. Тут требуется какая-то идея или наблюдение. Возможно, именно поэтому многие не смогли решить данную задачу.

Задача №2 (7 балла)

Два шестых класса приобрели билеты на футбольный матч Лиги чемпионов. 6-А приобрёл 30 билетов, а 6-Б — 24 билета. Болельщики из 6-В класса сокрушались, что они вовремя не позаботились о билетах. Из дружеских соображений владельцы билетов решили распределить имеющиеся билеты поровну между болельщиками трёх классов. Учащиеся 6-В передали своим друзьям из двух других классов стоимость полученных билетов, 1440 руб. Как следует разделить полученные деньги между 6-А и 6-Б?

Решение

Болельщикам каждого из трёх классов досталось по $(30 + 24):3 = 18$ билетов. 6-А передал 6-В $30 – 18 = 12$ билетов, 6-Б — $24 – 18 = 6$ билетов. Так как 18 билетов стоят 1440 руб., то 1 билет стоит $1440:18 = 80$ руб. Поэтому 12 билетов стоят $80·12 = 960$ руб., а 6 билетов — $80·6 = 480$ руб.

Ответ. 960 руб. и 480 руб.

Комментарий:

Задача довольно простая и решение не требует особых знаний или навыков. Здесь нужно было только правильно все посчитать. 69% участников справились с этой задачей.

<u>**Задача №3 (7 балла)**</u>

В копилке собрано 400 рублей монетами достоинством 1 руб., 2 руб., 5 руб., 10 руб.

1) Можно ли этими монетами заплатить 105 руб. без сдачи?
2) Какие суммы могут быть оплачены собранными средствами без сдачи?

Решение

1) Так как в копилке 400 рублей и есть хотя бы по одной монете достоинством 1 руб. и 2 руб., то в ней имеется ещё одна монета достоинством 2 руб. или 2 монеты по 1 руб. Следовательно, из копилки можно извлечь монеты на сумму 1 + 2 + 2 = 5 рублей. Оставшиеся 105 – 5 = 100 рублей нетрудно выбрать при любом наборе монет.

2) Из наличия либо трёх монет по 1 руб. и одной достоинством 2 руб. либо одной достоинством 1 руб. и двух по 2 руб. и монет достоинством 5 руб. и 10 руб. следует, что любую сумму от 1 руб. до 400 руб. можно оплатить содержимым копилки.

Ответ. 1) Да; 2) от 1 руб. до 400 руб.

Комментарий:

Основная ошибка участников в этой задаче заключалась в том, что они считали, что количество купюр каждого вида в копилке не ограничено. Но в условии не сказано, сколько именно купюр каждого вида в копилке. Доказательство должно было быть в общем виде, то есть не зависеть от того, какие именно купюры составляют набор в 400 рублей. Правильный ответ в этой задаче дали практически все, но не многие смогли его доказать.

<u>**Задача №4 (7 балла)**</u>

В классе 30 учеников. Возможно ли, чтобы 9 из них имели по 3 друга в этом классе, 11 — по 4, а 10 — по 5 друзей?

Решение

Если *A* дружит с *B*, то *B* дружит с *A*, поэтому общее количество «дружб» в классе должно быть чётным. По условию, общее количество «дружб» в рассматриваемом классе равно $9 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 121$. Это число нечётно, поэтому представленная ситуация невозможна.

Ответ. Невозможно.

Комментарий:

Эта задача, как и первая, требовала некоторого наблюдения. Обычно решение подобных задач начинается с попытки построить пример, а после того как пример построить не получается, начинается поиск противоречия. Эту задачу смогли решить только 28% участников.

<u>**Задача №5 (7 балла)**</u>

Цены порции мороженого и каждого пирожного выражаются целыми числами рублей. Костя, купив 3 порции мороженого и 4 пирожных, сумел рассчитаться без сдачи только пятирублёвыми монетами. Катя купила 1 порцию такого же мороженого и 3 таких же пирожных. Сможет ли она также рассчитаться без сдачи только пятирублёвыми монетами?

Решение

Пусть порция мороженого стоит x рублей, а одно пирожное — y рублей. Костя за свою покупку заплатил $3x + 4y$ рублей. По условию, число $3x + 4y$ делится на 5. Следовательно, на 5 делится и удвоенное число, то есть $6x + 8y$, а значит и число $6x + 8y - 5x - 5y = x + 3y$. Катя заплатила за свою покупку $x + 3y$ рублей. Следовательно, она сможет рассчитаться пятирублёвыми монетами.

Ответ. Сможет.

Комментарий:

Эту задачу тоже решили только 28% участников. Основная ошибка при решении заключалась в том, что участники просто приводили пример, в котором цены на мороженое и пирожное делятся на 5 и показывали, что Катя сможет рассчитаться пятирублевыми монетами. Но это лишь частный случай, он не является решением задачи в целом.

Задача №6 (7 балла)

На канатной дороге 72 одноместных кресла. Когда едешь по ней, каждые 10 секунд встречается кресло.

1) Сколько времени занимает подъём по этой дороге одного человека?
2) Какое наименьшее время занимает подъём: а) 10 человек; б) 200 человек?

Решение

1) Так как кресло встречается каждые 10 секунд, то расстояние равное расстоянию между соседними креслами одно кресло проходит за 20 секунд. Так как кресел 72, то путь канатной дороги равен расстоянию между соседними креслами умноженному на 36 (72/2=36). Значит, подъем одного человека занимает 36·20=720 секунд, то есть 12 минут.

2) а) Первый из десяти доберётся за 12 минут. Второй, если он едет на следующем кресле, приедет после него через 20 с, третий при том же условии через 20·2 = 40 с и т. д. Следовательно, подъём 10 человек займёт не менее 720+20·9=900 секунд, то есть 15 минут.

б) Чтобы поднять 200 человек, понадобится не менее 720+20·199=4700 секунд, то есть 78 минут 20 секунд.

Ответ. 1) 12 минут; 2) а) 15 минут; б) 78 минут 20 секунд.

Комментарий:

35% участников справились с данной задачей. В этой задаче очень важно правильно представлять себе картину происходящего. Для этого можно попробовать решить сначала более простую задачу, где кресел у подъемника будет не 72, а 4. Для упрощенной задачи можно нарисовать промежуточные моменты движения кресла снизу вверх, и попытаться понять какое время требуется на каждом этапе.

Задача №7 (7 балла)

Парашютист падал, не раскрывая парашюта, 3 секунды. За первую секунду он снизился на 4 м 9 дм, а за каждую следующую снижался больше, чем за предыдущую секунду, на одно и то же расстояние. За 3 секунды он снизился на 44 м 1 дм. На какое расстояние он снизился за: 1) вторую секунду; 2) третью секунду?

Решение

Пусть за каждую следующую парашютист снижался больше, чем за предыдущую секунду, на a м. Тогда за вторую секунду он снизился на $(4{,}9 + a)$ м, а за третью — на $(4{,}9 + a + a) = (4{,}9 + 2a)$ м. По условию, имеем уравнение:

$4,\ 9 + (4{,}9 + a) + (4{,}9 + 2a) = 44{,}1$ или $14{,}7 + 4a = 44{,}1$, $a = 9{,}8$ (м).

Следовательно, за вторую секунду парашютист спустился на $4{,}9 + 9{,}8 = 14{,}7$ м, а за третью — на $14{,}7 + 9{,}8 = 24{,}5$ м.

Ответ. 1) На 14,7 м; 2) на 24,5 м.

Комментарий:

Около половины участников (49%) справились с этой задачей. Задача заключалась в том, чтобы правильно составить линейное уравнение. Иногда для простоты вычислений лучше перевести все в более удобные единицы измерения, в данном случае это дм. Проделывать вычисления с целыми числами иногда проще, чем с десятичными дробями.

Задача №8 (7 балла)

В чемпионате по водному полу каждая команда сыграла со всеми остальными по одной игре. За победу в матче присуждалось 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Могли ли команды, занявшие 1, 2 и 3 места, набрать соответственно 7 очков, 5 очков и 3 очка, если каждая из остальных команд набрала меньше 3-х очков?

Решение

В каждом матче разыгрывается 2 очка. Так как команды, занявшие первые три места, набрали вместе 15 очков, то игр было больше 7. Следовательно, команд было больше 4-х, поскольку 4 команды провели бы всего $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ игр.

Если команд было 5, то они сыграли $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ игр и всего набрали 20 очков. Поэтому 2 команды, занявшие последние места, набрали вместе 20 – 15 = 5 очков. При этом одна из них набрала не менее 3-х очков, что противоречит условию. Таким образом, при 5 и тем более при большем количестве участников чемпионата, занявшие 1, 2 и 3 места, не могли набрать соответственно 7 очков, 5 очков и 3 очка.

Ответ. Нет.

Эта задача требовала некоторого наблюдения. Обычно решение подобных задач начинается с попытки построить пример, а после того как пример построить не получается, начинается поиск противоречия. Эту задачу смогли решить только 31% участников.

Задача №9 (7 балла)

Петя пообещал Маше угадать номер её квартиры, задав ей не более 4-х вопросов, на которые она должна отвечать односложно: «да» или «нет». Сможет ли Петя выполнить своё обещание, если он знает, что Маша живёт в 1-м подъезде четырёхэтажного дома и что на каждом этаже 4 квартиры?

Решение

Из условия следует, что номер Машиной квартиры не больше 16. Вопросы задаются так, что промежуток, в котором находится номер Машиной квартиры, каждый раз делится пополам. Последовательность вопросов и возможных ответов представлена в следующей таблице.

<table>
<tr><td>1-й вопрос</td><td colspan="16">Номер твоей квартиры больше 8?</td></tr>
<tr><td>Ответ</td><td colspan="8">Да</td><td colspan="8">Нет</td></tr>
<tr><td>2-й вопрос</td><td colspan="8">Он больше 12?</td><td colspan="8">Он больше 4-х?</td></tr>
<tr><td>Ответ</td><td colspan="4">Да</td><td colspan="4">Нет</td><td colspan="4">Да</td><td colspan="4">Нет</td></tr>
<tr><td>3-й вопрос</td><td colspan="4">Он больше 14?</td><td colspan="4">Он больше 10?</td><td colspan="4">Он больше 6?</td><td colspan="4">Он больше 2?</td></tr>
<tr><td>Ответ</td><td colspan="2">Да</td><td colspan="2">Нет</td><td colspan="2">Да</td><td colspan="2">Нет</td><td colspan="2">Да</td><td colspan="2">Нет</td><td colspan="2">Да</td><td colspan="2">Нет</td></tr>
<tr><td>4-й вопрос</td><td colspan="2">Он больше 15?</td><td colspan="2">Он больше 13?</td><td colspan="2">Он больше 11</td><td colspan="2">Он > 9?</td><td colspan="2">Он > 7?</td><td colspan="2">Он > 5?</td><td colspan="2">Он > 3?</td><td colspan="2">Он > 1?</td></tr>
<tr><td>Ответ</td><td>да</td><td>нет</td><td>да</td><td>нет</td><td>да</td><td>Нет</td><td>да</td><td>Нет</td><td>Да</td><td>нет</td><td>Да</td><td>Нет</td><td>Да</td><td>нет</td><td>Да</td><td>нет</td></tr>
<tr><td>Вывод</td><td>№16</td><td>№15</td><td>№14</td><td>№13</td><td>№12</td><td>№11</td><td>№10</td><td>№9</td><td>№8</td><td>№7</td><td>№6</td><td>№5</td><td>№4</td><td>№3</td><td>№2</td><td>№1</td></tr>
</table>

Ответ. Сможет.

Комментарий:

79% участников справились с данной задачей. В подобных задачах важно понимать, какое наибольшее количество неверных ответов вы можете отсечь, задав тот или иной вопрос. Ведь задавая очередной вопрос, вы делите оставшиеся возможные варианты на 2 группы, а получив ответ на вопрос, вы понимаете, в какой из этих групп находится искомое число.

Задача №10 (7 балла)

Три стрелка Антон, Борис и Василий сделали по 6 выстрелов по одной мишени и выбили по одинаковому количеству очков. Антон за первые три выстрела выбил 43 очка, а Борис первым выстрелом выбил три очка. Сколько очков в каждом выстреле выбил Антон, если в 50 очков было одно попадание, в 25 — два, в 20 — три, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — два, в 2 — два, в 1 —три?

Решение

Всего сделано $6 \cdot 3 = 18$ выстрелов и выбито $50 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 213$ очков. Так как все выбили по одинаковому количеству очков, то каждый выбил по $213:3 = 71$ очку, все выстрелы были результативными, поскольку количество попаданий равно $1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 3 = 18$.

Поскольку Антон за первые три выстрела выбил 43 очка, то его результаты первых трёх выстрелов могли быть только следующими: $20 + 20 + 3 = 43$. В трёх последних выстрелах он выбил $71 – 43 = 28$ очков. За три выстрела выбить 28 очков можно $25 + 2 + 1 = 28$ или $20+5+3$.

Предположим, что Антон за вторые три выстрела выбил 20, 5 и 3. Тогда оставшийся набор чисел (50, 25, 25, 10, 10, 10, 5, 2, 2, 1, 1 и 1) надо поделить на два набора по шесть чисел так, чтобы сумма чисел в каждом наборе была равна 71. Покажем, что это сделать нельзя. Числа 50 и 25 не могут быть в одном наборе, так как сумма будет больше 71. Значит, в одном наборе есть число 50, а в другом два числа по 25. Имеется три числа 10, значит, в каком-либо наборе их будет не менее двух. Тогда сумма уже имеющихся чисел в этом наборе будет равна 70, а чисел этих не более четырех. Тогда с оставшимися числами из набора сумма будет больше 71. Таким образом, Антон не мог выбить 20, 5 и 3 второй тройкой выстрелов.

Покажем, что Антон мог выбить второй тройкой выстрелов 25, 2 и 1. Для этого достаточно привести пример:

Антон – 20, 20, 3, 25, 2 и 1;

Борис – 50, 10, 5, 3, 2, и 1;

Василий – 25, 20, 10, 10, 5 и 1.

Итак, в шести выстрелах Антон выбил 20 очков; 20 очков; 3 очка; 25 очков; 2 очка; 1 очко, причём указанные количества очков как первых, так и последних трёх выстрелов могли быть получены в любом порядке выстрелов.

Ответ. 20; 20; 3; 25; 2; 1.

Комментарий:

Решение задачи можно упростить, если использовать условие о том, что Борис первым выстрелом выбил три очка. Так как у Антона в первых трех выстрелах (20, 20 и 3) тоже было попадание в 3 очка, а всего попаданий в 3 очка было два, то вариант, когда Антон за вторые три выстрела попал в 20, 5 и 3 можно не рассматривать. В таком случае решение становится значительно короче. С этой задачей справились 33% участников.

Разбор задач из тестовой части заданий

8-9 класс

Творческое задание

Выполни задания и запиши развёрнутое решение.

Задача №1 (7 балла)

В первенстве региона по хоккею участвует 20 команд. Верно ли, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей?

Решение

Каждая команда могла сыграть от 0 до 19 матчей. Поэтому количество игр каждой команды может принимать значения 0, 1, 2, …, 19. Если бы все 20 команд сыграли различное количество матчей, то среди участников первенства было бы по одной команде, сыгравших 0, 1, 2, …, 19 игр. Однако, если есть команда, сыгравшая 19 игр, то есть сыграла со всеми остальными командами, то нет команды, сыгравшей 0 игр. Получили противоречие, которое доказывает, в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

Ответ. Верно.

Комментарий:

Решение задачи довольно простое. Решается она методом от противного. К сожалению, задачу смогли решить только 25% участников. Приступать к решению подобных задач можно рассмотрев задачу на более простом примере. Например, взять количество команд не 20, а 3 или 4 и попробовать построить пример, когда условие верно. Если пример построить не удается, возможно, вы заметите закономерности, которые помогут вам понять, почему при 20 командах условие тоже выполнить не удастся.

Задача №2 (7 балла)

В некоторой денежной системе используются монеты достоинством 1 зед, 2 зеда, 5 зедов и 10 зедов (зед — условная денежная единица). У Сергея 24 монеты на сумму 49 зедов. Обязательно ли среди этих монет есть хотя бы одна монета достоинством 2 зеда?

Решение

Обозначим через x, y, z, t количества монет Сергея достоинством соответственно 1 зед, 2 зеда, 5 зедов и 10 зедов. Из условия имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z+t=24 \\ x+2y+5z+10t=49 \end{cases}$$

Вычтя из левой части второго уравнения левую часть первого, а из правой — правую, получим: $y + 4z + 9t = 25$. Проверим, может ли значение y равняться нулю. Если $y = 0$, то последнее уравнение принимает вид: $4z + 9t = 25$. Выясним, имеет ли оно решение в целых неотрицательных числах. Так как t не может быть чётным, то остаётся один вариант: $t = 1$, $z = 4$. Тогда $x = 19$. Таким образом, среди монет Сергея монета достоинством 2 зеда может не содержаться: у него может быть 4 монеты по 5 зедов, 1 монета достоинством 10 зедов и 19 монет достоинством 1 зед.

Ответ. Нет.

Комментарий:

По идее задача решается перебором, но вариантов здесь достаточно много, поэтому найти искомый пример довольно непросто. Эту задачу смогли решить только 20% участников.

Задача №3 (7 балла)

Известно, что размеры комнаты выражаются целыми числами метров. Каковы размеры комнаты, если разность площади пола и его периметра численно равна 3?

Решение

Обозначим размеры комнаты через m метров и n метров. По условию,

$mn - 2(m + n) = 3$. Тогда $m(n - 2) = 3 + 2n$ или, если $n \neq 2$ м, то $m = \frac{3+2n}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}$.

Число $\frac{7}{n-2}$ — целое при двух значениях n: $n_1 = 3$ и $n_2 = 2 + 7 = 9$. Тогда $m_1 = 2 + 7 = 9$, $m_2 = 2 + 1 = 3$. Следовательно, комната имеет размеры 3 м×9 м.

Ответ. 3 м×9 м.

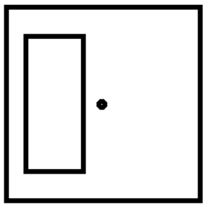
С этой задачей справились 44% участников. Задача на решение уравнения с двумя неизвестными в натуральных числах. При решении подобных уравнений, надо попытаться выразить одну переменную через другую, после чего найти решения становиться не сложно. Основная ошибка участников в данной задаче была в том, что они нашли ответ, но не доказали что он единственный. Без этого решение не считается полным.

Задача №4 (7 балла)

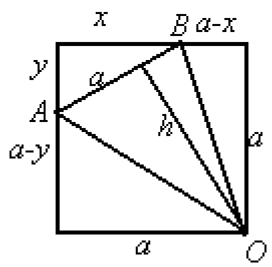
В центре площадки размером 100 м × 100 м стоит столб радиуса 10 см. Можно ли на этой площадке поместить павильон прямоугольной формы размерами: 1) 30 м × 70 м; 2) 50 м × 50 м?

Решение

1) Возможность поместить на площадке павильон прямоугольной формы размерами 30 м × 70 м показана на рис. Очевидно, что столб в центре площадке не помешает это сделать.



2) Павильон размерами 50 м × 50 м поместить нельзя, так как каждый квадрат размерами $a \times a$ внутри квадрата размерами $2a \times 2a$ обязательно содержит центр большого квадрата. Для обоснования этого достаточно доказать, что расстояние от вершины квадрата со стороной a до отрезка длиной a, концы которого лежат на сторонах квадрата, меньше a (см. рис.).



Пусть h — расстояние от вершины квадрата O до отрезка AB. Тогда

$$S_{ABO} = \frac{1}{2}ah = a^2 - \frac{1}{2}\left(a(a-x) + a(a-y) + xy\right) = \frac{1}{2}\left(a(x+y) - xy\right).$$

Следовательно, $h = (x+y) - \frac{xy}{a}$.

Докажем, что $h < a$, если $x^2 + y^2 = a^2$:

$$x + y - \frac{xy}{a} < a \Leftrightarrow (x+y)^2 < \left(a + \frac{xy}{a}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2xy < a^2 + 2xy + \frac{x^2y^2}{a^2}.$$

Получили верное неравенство. Следовательно, $h < a$.

Ответ. 1) Да; 2) нет.

Комментарий:

Большинство участников смогли построить пример для первого пункта задачи. А вот ответ на второй пункт задачи чаще всего оставался без доказательства. Советую всем подробно разобраться с решением данной задачи.

<u>Задача №5 (7 балла)</u>

Из каких положений шара на прямоугольном бильярдном столе можно ударом кия направить его так, чтобы, отразившись от всех бортов (угол падения равен углу отражения), он прошёл через первоначальное положение?

Решение

Предположим, что шар, вылетевший из точки M и отразившись от бортов в точках A_2, A_3, A_4, A_1, по закону: «угол падения равен углу отражения» возвратился в точку M. Из построений на рис. 1 следует, что точка M лежит на стороне параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$, так как противоположные углы четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ равны.

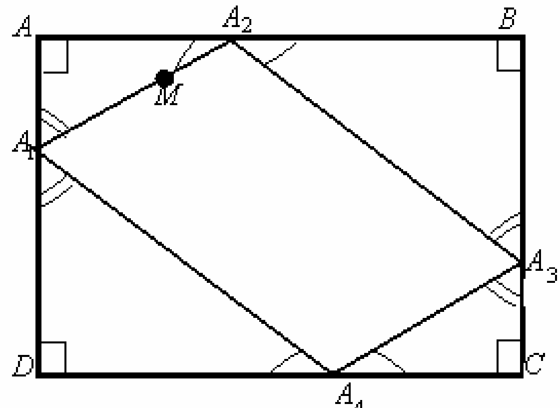


Рис. 1

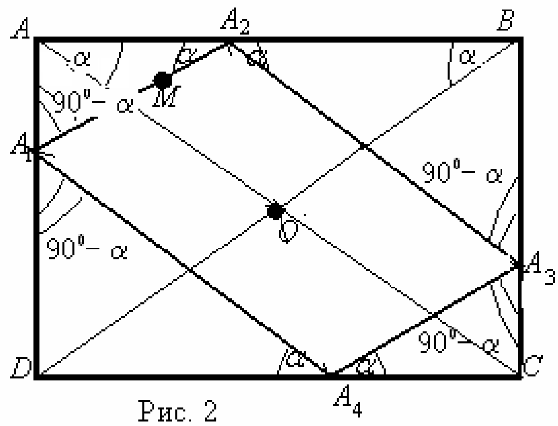


Рис. 2

Задача свелась к возможности построения параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$ для данной точки M. Проведём через точку M прямую, параллельную диагонали BD, и обозначим точки её пересечения со сторонами прямоугольника через A_1 и A_2 (рис. 2). Через точки A_1 и A_2 проведём прямые, параллельные диагонали AC и обозначим точки их пересечения со сторонами прямоугольника через A_3 и A_4. Углы, образованные смежными сторонами четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ со сторонами прямоугольника, равны по построению (см. рис.2). Из этого следует, что четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ — параллелограмм, а замкнутая ломаная линия $MA_2A_3A_4\,A_1$ является искомой траекторией.

Указанное построение возможно для всех точек прямоугольника, кроме его вершин и точки пересечения диагоналей. Следовательно, шар может находиться во всех точках бильярдного стола, кроме точки пересечения диагоналей и углов.

Ответ. Из всех положений, кроме точки пересечения диагоналей и углов стола.

Комментарий:

Решения большинства участников основывалось только на рисунке. Но в задачах по геометрии необходимо все строго доказывать, ведь рисунки содержат погрешности и даже ответы, основанные только на рисунке, зачастую получаются неверными. Эта задача оказалась самой сложной для участников, ее смогли решить только 3%.

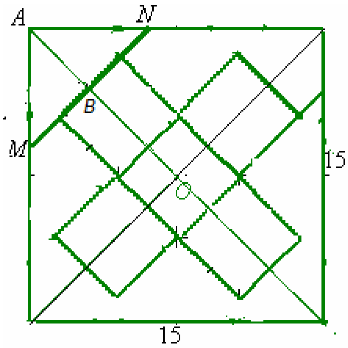
Задача №6 (7 балла)

Можно ли кубик с ребром 5 см завернуть в платок размером 15 см × 15 см так, чтобы все грани были обёрнуты?

Решение

Диагональ квадрата со стороной 15 см приближённо, с недостатком, равна $\sqrt{2}\cdot 15 \approx 22$ см. Чтобы развёртка поверхности куба без одной грани поместилась так, как это показано на рисунке, достаточно, чтобы выполнялось неравенство *MN* > 5, где *MN* параллельна диагонали и находится на расстоянии 7,5 см от неё.

Так как *MN* = 2*AB* = 2(*AO* – *BO*) ≥ 2(11 – 7,5) = 7, то данный кубик можно обернуть платком размером 15 см × 15 см. Шестую грань кубика закроют 4 прямоугольных уголка, имеющие форму треугольника AMN.



Ответ. Можно.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить только 13% участников. Основная ошибка при решении данной задачи заключалась в том, что ученики располагали развертку кубика так, что стороны кубика были параллельны сторонам платка. При таком расположении завернуть кубик в платок не удастся.

Задача №7 (7 балла)

В буфете продавались пирожки по 10 руб., булки по 12 руб., ватрушки по 14 руб., слойки по 16 руб. и коржики по 20 руб. Группа учащихся купила 14 изделий на 200 руб. Сумма цен купленных изделий равна 42 руб. Сколько и каких изделий куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше шести и никаких изделий не было куплено в одинаковом количестве?

Решение

Обозначим количества купленных указанных кулинарных изделий первыми буквами их названий: П, Б, В, С, К. Так как сумма цен купленных изделий равна 42 руб., то могли купить или булки, ватрушки, слойки (12 + 14 + 16 = 42) или пирожки, булки и коржики (10 + 12 + 20 = 42).

Если купили булки, ватрушки и слойки, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 12Б + 14В + 16С = 200, \\ Б + В + С = 14. \end{cases}$$

Умножив обе части второго уравнения системы на 12 и вычитая их из соответствующих частей первого уравнения, получим: 2В + 4С = 32 или В + 2С = 16.

Так как В и С — натуральные числа, по условию, меньшие 7, то полученному уравнению удовлетворяют следующие значения: С1 = 6, В1 = 4 и С2 = 5, В2 = 6. Тогда Б1 = 14 – (6 + 4) = 4, Б2 = 14 – (5 + 6) = 3.

По условию, количества купленных изделий разных видов различны. Следовательно, условию удовлетворяет только одно решение: Б = 3, В = 6, С = 5, то есть куплено 3 булки, 6 ватрушек и 5 слоек.

Если купили пирожки, булки и коржики, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 10П + 12Б + 20К = 200, \\ П + Б + К = 14. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получим уравнение Б + 5К = 30. Это уравнение не имеет решений, удовлетворяющих условию.

Ответ. 3 булки, 6 ватрушек и 5 слоек.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить 38% участников. Еще одна задача на решение системы линейных уравнений в натуральных числах. Некоторые пытались решать данную задачу перебором, что считаю нецелесообразным, ведь вариантов перебора очень много. Даже если вы сможете найти правильный ответ, то показать, что он единственный будет очень непросто.

<u>Задача №8 (7 балла)</u>

В связи со стихийным бедствием в соседнем районе в сельскую школу привезли учащихся 1 – 4 классов из этого района. Прибывших учеников поровну распределили по четырём классам. Оказалось, что в первом классе новички составили половину его состава, во втором классе они составили $\frac{2}{3}$ его состава, в третьем — $\frac{3}{4}$ его состава, а в четвёртом — $\frac{4}{5}$ его состава. Какое наименьшее количество учащихся могли привезти в указанную школу?

Решение

Обозначим через a количество учащихся, прибывших в указанную школу, а через x, y, z, t количества учащихся 1, 2, 3 и 4 классов соответственно после появления там новичков. Из условия вытекает, что $\frac{a}{4} = \frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4} == \frac{4t}{5}$. Отсюда следует, что $15a = 30x = 40y = 45z = 48t$ — целое число. Это число делится на 15, 30, 40, 45 и 48, то есть является их общим кратным. Последовательно найдём наименьшее общее кратное этих чисел. Наименьшее общее кратное чисел 15 и 30 равно 30, 30 и 40 равно 120, 120 и 45 — 360, 360 и 48 — 720.

Поэтому в рассматриваемую школу могли привезти самое меньшее 720:15 = 48 учащихся.

Ответ. 48.

Комментарий:

26% участников решили эту задачу. Задача на нахождение наименьшего общего кратного. Решать ее можно было немного другим путем, нежели в авторском решении. Обозначив за х количество новичков в каждом классе, можно понять, что х должно делиться на 4 (так как это $\frac{4}{5}$ состава четвертого класса), аналогично х должно делиться на 3 и на 2. Наименьшее общее кратное чисел 3 и 4 это 12, то есть х не может быть меньше 12. Значит всего привезли $12 \cdot 4 = 48$ учеников.

Задача №9 (7 балла)

В параллели 8-х классов мальчиков больше 34%, но меньше 35%. Какое наименьшее количество учащихся может быть в такой параллели?

Решение

Обозначим количество учащихся в параллели через x, а количество мальчиков в ней через m. По условию, выполняются неравенства $0{,}34x < m < 0{,}35x$. Следовательно, некоторое число x может быть количеством учащихся в параллели, если существует натуральное число, большее $0{,}34x$ и меньшее $0{,}35x$.

Для поиска искомого значения x исследуем функцию $y = [0{,}34x] – [0{,}35x]$, x = 1, 2, …, где $[a]$ — наибольшее целое число, не превосходящее a. Нужно найти наименьшее значение аргумента x, при котором значение функции равно 1 и оба значения $0{,}34x$ и $0{,}35x$ — не целые.

Построим таблицу значений указанной функции.

x	1	2	3	4	…	9	…	11	12	…	15	…	18	…	20	…	23
0,34	0,34	0,68	1,02	1,36		3,06		3,74	4,08		5,1		6,12		6,8		7,82
0,35	0,35	0,7	1,05	1,4		3,15		3,85	4,2		5,25		6,3		7		8,05
[0,34x] – [0,35x]	0	0	0	0		0		0	0		0		0		1		1

Следовательно, x = 23 является наименьшим значением аргумента, при котором выполняется указанное выше требование. Искомое значение количества учащихся равно 23.

Ответ. 23.

Комментарий:

Задача решена перебором. Эту задачу можно было решить, имея в наличии калькулятор и немного времени. Но так как перебор здесь достаточно объемный, задачу решили только 5% участников.

Задача №10 (7 балла)

Прибыль от продажи 100 единиц товара за месяц составила 16 тыс. зедов (зед — условная денежная единица). Наблюдения показали, что понижение прибыли на единицу товара на a зедов увеличивает объём продаж за этот же период на a % от объёма продаж по прежней цене. При какой прибыли от продажи единицы товара месячная прибыль будет наибольшей?

Решение

Из условия следует, что прибыль от продажи единицы товара составила 16 000:100 = 160 зедов. Пользуясь условием, составим таблицу, отражающую зависимость общей прибыли от прибыли от продажи единицы товара и количества продаваемого товара с учётом изменения этого количества при изменении прибыли от продажи единицы товара.

Прибыль от продажи единицы товара	160	150	140	130	120	110	100
Количество	100	110	120	130	140	150	160
Месячная прибыль	16 000	16 500	16 800	16 900	16 800	16 500	16 000

Из таблицы видно, что для получения наибольшей месячной прибыли целесообразно довольствоваться прибылью 130 зедов от продажи единицы товара. Действительно, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции y=(100+x)(160-x). Докажем, что при фиксированной сумме двух чисел (в нашем случае – 260), их произведение будет наибольшим, когда они равны (в нашем случае по 130). Пусть сумма двух чисел равна 2*a, тогда (a-b)(a+b)=a2-b2. Так как b2 не может быть меньше 0, то наибольшее значение функции y=(a-b)(a+b) при b=0.

Ответ. При 130 зедах.

Комментарий:

Задача на нахождение наибольшего значения функции. Многие еще не умеют решать подобные задачи и попытались просто подобрать ответ. Эту задачу смогли решить 33% участников.

ЗНАНИКА

Электронная школа Знаника

znanika.ru