Золотой ключик

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор задач из тестовой части заданий

4-5 класс

Тестовые задания

Ответь на вопросы, выбрав правильный вариант ответа.

Задача №1 (3 балла)

В 5 классе 30 учащихся. На каникулы им дали задание придумать задачи для математической олимпиады второклассников. Некоторые придумали по одной задаче, а из остальных учащихся половина придумала по две, другой половине не удалось придумать задач. Сколько всего задач придумали пятиклассники?

А. Невозможно определить. Б. 15. В. 25. Г. 30.

Решение

По условию, некоторые учащиеся придумали по одной задаче, половина остальных учащихся — по две. Следовательно, количество задач, придуманных «остальными», равно сумме количеств учащихся класса, не придумавших ни одной задачи, и придумавших по две задачи. Прибавив к ним количество задач, придуманных учащимися по одной, получим, что общее количество придуманных задач равно количеству учащихся в классе, то есть 30.

Ответ. Г. 30.

Комментарий:

В этой задаче 70% участников выбрали правильный ответ. Многие посчитали, что общее количество задач определить невозможно, ведь не известно, сколько именно учащихся придумали по одной задаче. Но если бы они попробовали посчитать ответ на нескольких частных случаях, то заметили бы, что ответ от этого не зависит. Также данную задачу можно было решить, составив уравнение $1\cdot x+\frac{2\cdot(30-x)}{2}=x+30-x=30$, где x – количество учащихся придумавших по одной задаче.

Задача №2 (3 балла)

Из одной заготовки выходит три детали. Из отходов от трёх заготовок можно получить ещё одну деталь. Сколько деталей можно получить из 48 заготовок?

А. 160. Б. 156. В. 148. Г. 144.

Решение

Из 48 заготовок можно получить 48·3 = 144 детали. Будем иметь отходы от 48 заготовок. Из них можно получить 48:3 = 16 деталей. Всего 144 + 16 = 160 деталей.

Ответ. А. 160.

Комментарий:

С этой задачей справились 85% участников. Задача довольно простая, не требовала особых знаний или изощренных идей для решения. Здесь нужно было просто правильно посчитать количество деталей.

<u>Задача №3 (3 балла)</u>

В классе 28 учащихся, 15 человек, посещает математический кружок, 12 — биологический, 7 человек посещают оба эти кружка. Сколько учащихся не посещает ни один из этих кружков?

А. 6. Б. 7. В. 8. Г. 9.

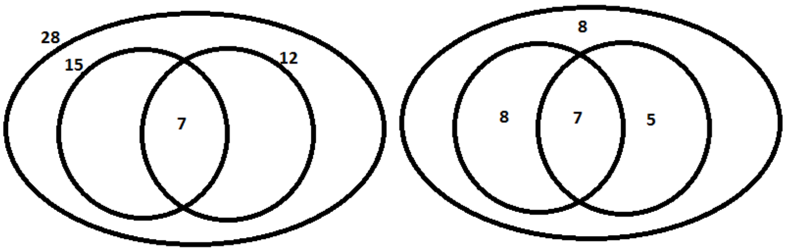
Решение

Всех учащихся класса можно разбить на 4 группы такие, что ни в какие две группы не войдёт один и тот же учащийся. А именно: посещающие только математический кружок, только биологический, оба эти кружка и не посещающие ни один из этих кружков. Только математический посещает 15–7 = 8 человек, только биологический — 12–7 = 5 учащихся, оба кружка — 7 человек. Следовательно, ни один из этих кружков не посещает 28 – (8 + 5 + 7) = 8 учащихся.

Ответ. В. 8.

Комментарий:

С этим заданием справились 85% участников. Задача на так называемые «круги Эйлера». Подобные задачи не редко встречаются на математических олимпиадах. Решать подобные задачи помогает рисунок:



Большой овал это все учащиеся класса, их 28. Левый круг – учащиеся, посещающие математический кружек, их 15. Правый круг – биологический, их 12. Пересечение кругов – учащиеся, посещающие оба кружка. Как и в авторском решении на рисунке видно четыре группы. Остается только правильно посчитать, сколько учащихся в каждой группе, исключая количества учащихся на пересечениях.

<u>Задача №4 (3 балла)</u>

6 арбузов тяжелее 10 дынь, но легче 5 тыкв. Что тяжелее: 3 тыквы или 5 дынь?

А. Их массы одинаковы. Б. 3 тыквы. В. 5 дынь. Г. Определить невозможно.

Решение

Так как 10 дынь легче 6 арбузов, а 6 арбузов легче 5 тыкв, то 10 дынь легче 5 тыкв, а тем более они легче 6 тыкв. Поскольку 10 дынь легче 6 тыкв, то 5 дынь легче 3 тыкв.

Ответ. Б. 3 тыквы.

Комментарий:

Эта задача тоже не вызвала больших трудностей. Ее смогли решить 88% участников. Условие состоит из двух неравенств 10*Д < 6*А < 5*Т. Необходимо сравнить 3*Т и 5*Д. Для решения данной задачи необходимо было только знать, что при умножении на одно и то же положительное число обеих частей неравенства и при прибавлении к большей части неравенства положительного числа, неравенство не изменится.

Задача №5 (3 балла)

В гостинице 1000 номеров и они нумеруются подряд, начиная с 1. На дверях каждого висит табличка с указанием номера. Сколько раз на этих табличках встречается цифра 3?

А. 302. Б. 300. В. 299. Г. 291.

Решение

В каждой сотне, кроме 4-й (от 300 до 399) цифра 3 встречается 20 раз. Например, во второй сотне это номера: 103, 113, 123, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 143, 153, 163, 173, 183, 193. В 4-й сотне к 20 аналогичным номерам добавляется 100 номеров 300, 301, …, 399, которые начинаются с цифры 3. Всего 20·9 + 120 = 300.

Ответ. Б. 300.

Комментарий:

В этой задаче 66% участников выбрали правильный ответ. Задача на комбинаторику. Имеет различные способы решения. Если вы хорошо владеете комбинаторными формулами, то ответ получается в одно действие: $3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$, где 3 – количество вариантов выбора разряда в котором стоит тройка и 10 – количество вариантов цифр на прочих разрядах.

Задача №6 (3 балла)

На плацу в воинской части в одну шеренгу по убыванию результатов их стрельбы выстроены 10 участников соревнований по стрельбе. Для командира, находящегося перед этой шеренгой, участник, который стоит слева от Алексея, выбил 50 очков, стоящий слева от Бориса — 48 очков, слева от Владимира — 47 очков, слева от Геннадия — 45 очков, слева от Дениса — 44 очка, слева от Егора — 43 очка, слева от Зиновия — 42 очка, слева от Игоря — 41 очко, слева от Константина — 40 очков. Сколько очков выбил Михаил?

А. Невозможно определить. Б. 50. В. 40. Г. 45.

Решение

Выстроено 10 человек, а в условии указаны результаты стрельбы 9 стрелков — тех, левее которых кто-то стоит, причём Михаила среди них нет. Участники соревнований выстроены в одну шеренгу в порядке убывания результатов их стрельбы. Следовательно, командир видит шеренгу в таком виде:

Михаил	Алексей	Борис	Владимир	Геннадий	Денис	Егор	Зиновий	Игорь	Константин
50	48	47	45	44	43	42	41	40	

Левее Михаила никто не стоит, он выбил 50 очков.

Ответ. Б. 50.

Комментарий:

С этой задачей справились только 39% участников. В задаче необходимо было понять на каком месте стоит Михаил. Подобные задачи требуют сообразительности, и им стоит уделять немного больше времени.

Задача №7 (3 балла)

У Светы были необычные часы. До какого-то момента они шли правильно, а потом продолжали идти с той же скоростью, но в обратном направлении до определённого момента. Так случилось однажды в 8-30 утра и продолжалось до 22-00. Какое время показывали Светины часы в 22-00?

А. 19.00. Б. 19.45. В. 20.30. Г. 21.00.

Решение

В обратном направлении Светины часы шли 22 ч 00 мин – 8 ч 30 мин = 13 ч 30 мин, то есть больше 12 ч на 13 ч 30 мин – 12 ч = 1 ч 30 мин. Через 12 ч после начала движения в обратном направлении часы Светы показывали 8 ч 30 мин вечера или 20 ч 30 мин. Ещё через 1 ч 30 мин, идя в обратном направлении, они показывали 20 ч 30 мин – 1 ч 30 мин = 19 ч. Следовательно, в тот момент, когда часы Светы прекратят движение в обратном направлении, они будут показывать 19.00.

Ответ. А. 19.00.

Комментарий:

В этой задаче верный ответ указали 75% участников. Задача не требовала никаких особых знаний и навыков. Нужно было только не ошибиться в расчетах.

Задача №8 (3 балла)

Несколько приятелей при встрече пожали друг другу руки. Сколько встретилось приятелей, если рукопожатий было 10?

А. 5. Б. 4. В. 3. Г. 2.

Решение

Если приятелей было двое, то было одно рукопожатие, а это не соответствует условию задачи. Если приятелей было трое, то рукопожатий было три. Если приятелей было четверо, то рукопожатий — шесть. Если приятелей было пятеро, то получается десять рукопожатий.

Таким образом, так как рукопожатий было десять, то встретилось пять приятелей.

Ответ. А. 5.

Комментарий:

Эта задача оказалась одной из самых простых. Ее смогли решить 92% участников. Задача решается простым перебором. Но если вдруг вы умеете решать квадратные уравнения, то данную задачу можно было решить, используя формулы комбинаторики. Пусть приятелей было x, тогда рукопожатий будет $\frac{x(x-1)}{2}$, по условию это равно 10. Корни данного уравнения это 5 и -4. Но так как количество приятелей должно быть числом натуральным, то ответ 5.

Задача №9 (3 балла)

В одном классе учатся Ваня, Коля, Маша и Настя. Ваня выше Коли, а Настя ниже Коли и Маши, Маша ниже Коли. Расположите названных одноклассников по росту: от самого высокого до самого низкого.

А. Ваня, Маша, Коля, Настя. Б. Маша, Ваня, Коля, Настя.

В. Настя, Коля, Маша, Ваня Г. Ваня, Коля, Маша, Настя.

Решение

Из условия вытекает, что Настя ниже всех, Коля ниже Вани, но выше Маши. Следовательно, условию удовлетворяет следующее расположение детей: Ваня, Коля, Маша, Настя.

Ответ. Г. Ваня, Коля, Маша, Настя.

Комментарий:

С этой задачей справились практически все участники (96%). Ответ на задачу написан в самом условии, надо лишь правильно расположить все неравенства.

<u>Задача №10 (3 балла)</u>

Сколькими способами можно развесить 10 одинаковых платьев в двух шкафах (чёрном и коричневом) так, чтобы в каждом шкафу было чётное количество платьев? (Все платья могут оказаться в одном шкафу).

А. 1-м. Б. 4-мя. В. 5-ю. Г. 6-ю.

Решение

Распределение платьев по шкафам представлено в следующей таблице.

1 шкаф	0	2	4	6	8	10
2 шкаф	10	8	6	4	2	0

Всего 6 способов.

Ответ. Г. 6-ю.

Комментарий:

Еще одна задача на комбинаторику. С нею справились 68% участников. Для простоты решения можно рассматривать платья парами, так как их должно быть четное число в обоих шкафах. Тогда задача будет заключаться в нахождении количества вариантов развесить 5 пар платьев в два шкафа. Так как в одном шкафу может быть от 0 до 5 пар, а во втором количество определяется однозначно в зависимости от количества пар платьев в первом шкафу, то всего вариантов будет 6.

<u>Задача №11 (3 балла)</u>

В многоэтажном доме в каждом подъезде на каждом этаже по две квартиры. Вера, живущая в квартире №60, перестукивается через стенку с Надей из квартиры №83. 1) Сколько в доме этажей? 2) На каком этаже живут Вера и Надя?

А. 1) 10; 2) на 7-м. Б. 1) 12; 2) на 7-м. В. 1) 11; 2) на 5-м. Г. 1) 12; 2) на 6-м.

Решение

1) Вера и Надя живут на одном и том же этаже в соседних подъездах. Соседняя с Надиной квартира, её номер 84, расположена так же, как квартира Веры. Так как в каждом подъезде на каждом этаже по две квартиры, то разность между номером этой квартиры и номером Вериной квартиры, то есть 84 – 60 = 24, равна удвоенному количеству этажей в доме. Следовательно, в доме 24:2 = 12 этажей.

2) В каждом подъезде по 24 квартиры. Поскольку результат деления числа 60 на 24 больше 2-х и меньше 3-х, то Вера живёт в 3-м подъезде. Наибольший номер квартиры во 2-м подъезде 48, 60 – 48 = 12, 12:2 = 6. Вера и Надя живут на 6-м этаже.

Ответ. Г. 1) 12; 2) на 6-м.

Комментарий:

Эту задачу решили 73% участников. Данную задачу можно было решать с помощью рисунка.

60	83	
	81	82
	79	80
	77	78
	75	76
	73	74
	71	72
	69	70
	67	68
	65	66
	63	64
	61	62

Предположив, что девочки живут на верхнем этаже (что не влияет на ответ в задаче) можно последовательно выстроить номера квартир в подъезде Нади. Дойдя до квартиры с номером 61 (первый этаж) посчитаем количество этажей в доме, их 12.

<u>Задача №12 (3 балла)</u>

Для подготовки новогодних подарков в супермаркете смешали 20 кг конфет по цене 250 руб. за килограмм, 50 кг — по цене 300 руб. и 10 кг конфет, цену которых нужно найти, если известно, что стоимость 500 г полученной смеси составила 150 руб.

А. 200 руб. Б. 250 руб. В. 400 руб. Г. 500 руб.

Решение

Пусть один новогодний подарок содержит 500 г конфет. Всего смешали 20 + 50 + 10 = 80 кг конфет. Отсюда следует, что подготовили 80 кг : 500 г = 80000 г : 500 г = 160 наборов. Каждый набор стоил 150 руб., поэтому все наборы стоили 150·160 = 24000 руб. Это стоимость всех конфет. 20 кг конфет по цене 250 руб. стоили 250·20 = 5000 руб., 50 кг трёхсотрублёвых конфет стоили 300·50 = 15000 руб. Поэтому 10 кг конфет, цену которых нужно найти, стоили 24000 – (5000 + 15000) = 4000 руб. Один килограмм этих конфет стоил 4000:10 = 400 руб.

Ответ. В. 400 руб.

Комментарий:

Это задание смогли решить 77% участников. Данная задача решается достаточно просто, если вы умеете решать линейные уравнения.

$20\cdot 250+50\cdot 300+10\cdot x=(20+50+10)\cdot 150\cdot 2$;

$5000+15000+10\cdot x=24000$;

$x=\dfrac{24000-15000-5000}{10}$;

x = 400.

<u>Задача №13 (3 балла)</u>

Рая, Сима и Таня ели в саду фрукты. Рая съела 10 слив и столько яблок, сколько абрикос съела Сима. Сима съела груш в 2 раза меньше, чем Рая слив, и три абрикоса. Таня ела только груши, причём она съела их больше, чем яблок Рая, но меньше, чем груш Сима. Сколько плодов съели девочки?

А. Невозможно определить. Б. 25. В. 28. Г. 32.

Решение

Так как Сима съела груш в 2 раза меньше, чем Рая слив, а Рая съела 10 слив, то Сима съела 10:2 = 5 груш. Поскольку Сима съела 3 абрикоса, а Рая съела столько яблок, сколько абрикос съела Сима, то Рая съела 3 яблока. Так как Таня съела груш больше, чем яблок Рая, а Рая съела 3 яблока, то Таня съела более 3 груш. Но Таня съела груш меньше, чем груш съела Сима, которая съела 5 груш. Поэтому Таня съела менее 5 груш, но более 3-х. Значит, она съела 4 груши.

Таким образом, Рая съела 10 слив и 3 яблока, всего 13 фруктов; Сима — 5 груш, 3 абрикоса, всего 8 плодов; Таня — 4 груши. Всего девочки съели 13 + 8 + 4 = 25 фруктов.

Ответ. Б. 25.

Комментарий:

В этой задаче требовалось внимательно и последовательно все посчитать, используя на каждом шаге некоторые данные условия. Большинство участников справились с этой задачей. Здесь 84% участников указали правильный ответ.

<u>Задача №14 (3 балла)</u>

У Лизы было ленточек для кукол меньше, чем у Тани. Если Таня даст Лизе столько ленточек, сколько у Лизы уже есть, то у Лизы ленточек станет вдвое меньше, чем осталось у Тани. Какое количество ленточек из приведенных в ответах могло быть у Тани первоначально?

А. 52. Б. 48. В. 25. Г. 24.

Решение

Примем количество Лизиных ленточек за 1 часть. Когда Таня передала Лизе столько ленточек, сколько у Лизы было, то количество ленточек у Лизы будет составлять 2 части, а у Тани на 1 часть меньше, чем было первоначально. Из условия следует, что количество ленточек, оставшихся у Тани, составляет 4 части, а первоначальное количество ленточек у неё — 5 частей. Поскольку в условии не приводится никаких конкретных данных о количествах ленточек у девочек, то очевидно, что у Тани могло быть любое количество, делящееся на 5, например, 25.

Ответ. В. 25.

Комментарий:

Эту задачу решили правильно 73% участников. Если вы умеете решать линейные уравнения, то задача решается очень просто. Пусть у Лизы было Л ленточек, а у Тани Т ленточек. Тогда 2*(Л + Л) = Т – Л, откуда получаем, что Т = 5*Л. Далее имея варианты ответа, можно подобрать такое Т, чтобы Л было целым числом.

<u>Задача №15 (3 балла)</u>

На витрине магазина разложены апельсины и мандарины в виде треугольника. В первом ряду — один апельсин, во втором — два мандарина, в третьем — три апельсина, в четвертом – четыре мандарина и т. д. Сколько лежало апельсинов, если всего было 20 рядов?

А. 100. Б. 110. В. 121. Г. 81.

Решение

Будем находить количество апельсинов. В первом ряду 1 апельсин, в первом и третьем 1 + 3 = 4 апельсина, в первом, третьем и пятом — 1 + 3 + 5 = 9 апельсинов, в первом, третьем, пятом и седьмом — 1 + 3 + 5 + 7 = 16. Продолжая и т. д., получим, что в случае 20 рядов, количество апельсинов будет равняться: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100.

Ответ. А. 100.

Комментарий:

Задача довольно простая, с ней справились 85% участников. Необходимо было правильно понять в каких рядах лежат апельсины и посчитать их сумму в этих рядах.

Разбор задач из тестовой части заданий

6-7 класс

Тестовые задания

Ответь на вопросы, выбрав правильный вариант ответа.

Задача №1 (3 балла)

Контрольную работу по математике 23 шестиклассника написали без «двоек», но «пятёрок» они получили меньше, чем «четвёрок», а «троек» в 6 раз больше, чем «четвёрок». Сколько учащихся получили за контрольную работу «пятёрку»?

А. Четыре. Б. Три. В. Два. Г. Один.

Решение

«Четвёрок» не может быть больше 3-х, так как тогда количество «троек» будет больше числа учащихся.

Если «четвёрок» было 3, то тогда «троек» — 18, следовательно, «пятёрок» — 2.

Если «четвёрок» было 2, то тогда «троек» — 12, следовательно, «пятёрок» — 9, что противоречит условию. Значит, «четвёрок» не могло быть 2, а тем более 1. Таким образом, «пятёрку» получили двое учащихся.

Ответ. В. Два.

Комментарий:

С задачей справились 87% участников. Задача не сложная, решается простым перебором. Также можно было решить задачу с помощью неравенства $7\cdot x<23<8\cdot x$, где x – количество четверок. $7<\frac{23}{x}<8$, откуда $\frac{23}{7}<x<\frac{23}{8}$. Левая часть неравенства больше трех на $\frac{2}{7}$, а правая меньше трех на $\frac{1}{8}$. Так как x должно быть натуральным числом, то x=3. В таком случае не сложно посчитать, что пятерок будет две.

Задача №2 (3 балла)

После снижения цены на общие тетради, каждая из которых стоила 50 руб., оставшиеся тетради предприниматель быстро продал и получил 2369 руб. Какое из приведенных в ответах значение совпадает с количеством процентов, на которое была снижена цена, если новая цена выражается целым количеством рублей?

А. 58%. Б. 56%. В. 54%. Г. 49%.

Решение

Так как 2369 = 23·103, 23 и 103 — простые числа и новая цена тетради меньше 50 руб., то осталось либо 103 тетради по цене 23 руб., либо 2369 тетрадей по цене 1 руб.

В первом случае тетрадь стала дешевле на 50 – 23 = 27 руб., то есть цена была снижена на $\frac{27}{50}\cdot 100=54\%$. Во втором случае тетрадь стала дешевле на 50 – 1 = 49 руб., то есть цена была снижена на $\frac{49}{50}\cdot 100=98\%$. Условию удовлетворяет ответ **В.** 54%.

Ответ. В. 54%.

Комментарий:

Эту задачу решили 80% участников. Для решения задачи достаточно было перебрать предложенные варианты ответа, и посмотреть делится ли 2369 на новые цены за тетрадь соответствующие каждому ответу.

Задача №3 (3 балла)

Магазин купил у производителя батарейки и продаёт их по 10 зедов за штуку (зед — условная денежная единица). Если покупатель покупает три батарейки, то четвёртая ему выдаётся в подарок. Известно, что магазин получает одну и ту же прибыль от продажи как двух батареек, так и трёх. По какой цене магазин купил батарейки у производителя?

А. По 8 зедов. Б. По 7 зедов. В. По 6 зедов. Г. По 5 зедов.

Решение

Пусть магазин покупал батарейки у производителя по x зедов за штуку. Тогда прибыль магазина от продажи одной батарейки равна $(10 - x)$ зедов.

При продаже двух батареек прибыль магазина составляет $2(10 - x) = 20 - 2x$ зедов, при продаже трёх – $3(10 - x) - x = 30 - 4x$ зедов. Имеем, по условию, уравнение: $20 - 2x = 30 - 4x$. Отсюда $x = 5$.

Ответ. Г. По 5 зедов.

Комментарий:

С третьей задачей также справились 80% участников. В этой задаче тоже можно было перебрать предложенные ответы. И посчитать равную ли прибыль получит магазин от продажи двух и трех батареек при той или иной закупочной цене.

Задача №4 (3 балла)

Отдыхающий вышел из санатория, расположенного на берегу моря, на прогулку. Он прошёл 1,5 км и возвратился по той же дороге. По ровной дороге отдыхающий шёл со скоростью 3 км/ч, в гору — 2 км/ч, под гору — 6 км/ч. Сколько времени заняла прогулка?

А. 40 мин. Б. 60 мин. В. 80 мин. Г. 90 мин.

Решение

Обозначим через l км сумму длин ровных участков на маршруте и через m км — сумму длин неровных участков. Из условия следует, что искомое время равно

$$\frac{l}{3}+\frac{l}{3}+\frac{m}{2}+\frac{m}{6}=\frac{2}{3}l+\frac{2}{3}m=\frac{2(l+m)}{3}=\frac{2\cdot 1{,}5}{3}=1 \text{ ч} = 60 \text{ мин.}$$

Ответ. Б. 60 мин.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить 71% участников. В задаче можно было заметить, что на 1 км дороги отдыхающий тратит одно и то же время, не зависимо от того ровная эта дорога или нет. Действительно, если дорога ровная, то это 40 минут (20 минут туда, и 20 минут на обратном пути), если же дорога неровная, то тоже 40 минут (30 минут в гору, и 10 минут в противоположном направлении). Раз на 1 км требуется 40 минут, то на 1,5 км потребуется час.

Задача №5 (3 балла)

Из города А в город В одновременно выехали два автомобиля. Один передвигался со средней скоростью 60 км/ч, а другой — 66 км/ч. Второй автомобиль прибыл в город В на 10 минут раньше первого. Каково расстояние между городами А и В?

А. 110 км. Б. 115 км. В. 120 км. Г. 130 км.

Решение

Обозначим расстояние между городами через x км. Первый автомобиль преодолел это расстояние за $\frac{x}{60}$ ч, а второй — за $\frac{x}{66}$ ч. Из условия имеем уравнение:

$$\frac{x}{60}-\frac{x}{66}=\frac{1}{6} \text{ или } x = 110.$$

Следовательно, расстояние между городами равно 110 км.

Ответ. А. 110 км.

Комментарий:

Здесь 70% участников указали правильный ответ. Стандартная задача на равномерное прямолинейное движение. Подобные задачи очень часто встречаются на математических конкурсах. Их просто необходимо уметь решать. Самая важная и чаще всего единственная формула необходимая для решения подобных задач $S = v \cdot t$, где S – путь, v – скорость, t – время.

<u>Задача №6 (3 балла)</u>

По прямолинейному шоссе двое велосипедистов двигались со скоростью 15 км/ч, расстояние между ними было 1 км. Начался подъём в гору, на котором скорость велосипедистов упала до 12 км/ч. Как изменилось расстояние между велосипедистами, когда они оба вышли на этот участок?

А. Не изменилось.

Б. Увеличилось на 200 м.

В. Уменьшилось на 125 м

Г. Уменьшилось на 200 м.

Решение

Когда велосипедист, ехавший впереди, только выехал на горный участок, второму оставалось проехать до него 1 километр. Так как ехавший сзади движется со скоростью 15 км/ч, то он доедет туда за 1:15 = $\frac{1}{15}$ часа. Всё это время велосипедисты сближались со скоростью 15 – 12 = 3 км/ч и сблизились на $\frac{3}{15}$ км = 200 м. После этого расстояние между велосипедистами меняться уже не будет, так как они будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Ответ. Г. Уменьшилось на 200 м.

Комментарий:

Эту задачу решили 63% участников. Многие подумали, что расстояние между велосипедистами не измениться. Но ведь когда первый велосипедист уже начнет подниматься в гору, его скорость уменьшится, и расстояние между велосипедистами будет сокращаться до тех пор, пока второй также не начнет подниматься в гору. Далее остается только правильно воспользоваться уже известной формулой $S = v \cdot t$, где S – путь, v – скорость, t – время, чтобы посчитать время, за которое второй проедет 1 км, и на сколько, сократится расстояние между велосипедистами за это время.

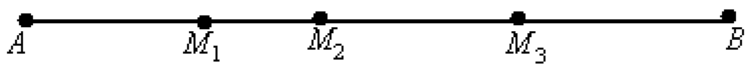
Задача №7 (3 балла)

Три машины едут по одной дороге из города А в город В. В некоторый момент сумма расстояний вдоль дороги от всех машин до города А равнялась 75 км, а до города В — 15 км. Какова длина дороги между городами А и В?

А. 30 км. Б. 45 км. В. 60 км. Г. 90 км.

Решение

Изобразим положение машин в указанный момент точками M_1, M_2, M_3 на прямой. По условию,



$AM_1 + AM_2 + AM_3 = 75$,

$M_1B + M_2B + M_3B = 15$.

Сложив левые и правые части полученных равенств и воспользовавшись тем, что сумма расстояний от каждой машины до городов А и В равна длине дороги между А и В, получим равенства:

$AM_1 + AM_2 + AM_3 + M_1B + M_2B + M_3B = 3*AB = 90$. Следовательно $AB = 30$ км, то есть длина дороги между A и B равна 30 км.

Ответ. А. 30 км.

Комментарий:

Эту задачу, как и предыдущую, решили 63% участников. Задача довольно простая, не требует знания никаких формул. Надо только нарисовать рисунок, и понять, какие суммы длин даны в условии задачи. Из них легко получается искомый ответ.

Задача №8 (3 балла)

По трудовому соглашению работнику причитается 72 зеда (зед — условная денежная единица) за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный (взятый им выходной, невыход на работу без предупреждения и т. д.) с него взыскивается 18 зедов. Через 60 дней выяснилось, что работнику причитается 3060 зедов. Сколько дней работал данный работник в течение этих 60 дней?

А. 46 дней. Б. 48 дней. В. 49 дней. Г. 50 дней.

Решение

Пусть в течение 60 дней работник работал x дней, не работал — $(60 - x)$ дней. Из условия имеем уравнение: $72x - 18(60 - x) = 3060$ или $90x = 4140$, откуда $x = 46$. Следовательно, работник работал 46 дней.

Ответ. А. 46.

Комментарий:

82% участников справились с этой задачей. Задачу можно было решить и без составления уравнения. Если бы работник отработал все 60 дней, то он заработал бы $60 \cdot 72 = 4320$. Теперь надо понять, что за каждый пропуск рабочего дня работник теряет из этих денег 72 + 18 = 90. Тогда 4320 – 3060 = 1260, это количество денег, которые работник потерял за свои выходные. 1260/90 = 14, количество выходных. Отсюда получаем, что рабочих дней было 60 – 14 = 46.

Задача №9 (3 балла)

В бак набрали воды для полива. В первый день израсходовали 30% набранной воды, во второй — 40% оставшейся в баке воды, а в третий день — половину воды, оставшейся после первых двух дней. Какое из приведенных в ответах значений равно с точностью до 10 литров количеству литров воды, набранной в бак, если после трёх дней полива осталось 4 десятилитровых ведра воды?

А. 230 л. Б. 190 л. В. 170 л. Г. 140 л.

Решение

Обозначим количество литров воды, набранной в бак, через x. Тогда после трёх дней полива в баке осталось $0,5\cdot 0,6\cdot 0,7x = 0,21x$. Имеем уравнение $0,21x = 40$, откуда $x \approx 190$. Из приведенных в ответах значений требованию задания удовлетворяет ответ **Б.** 190 л.

Ответ. Б. 190 л.

Комментарий:

Эту задачу решили 75% участников. В этой задаче можно было просто перебрать предложенные варианты ответа, и посчитать, сколько литров воды останется после трех дней полива.

Задача №10 (3 балла)

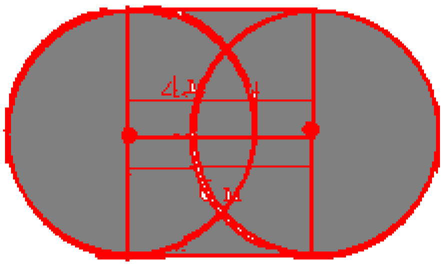
На лугу пасётся коза, привязанная верёвкой к колышку. Колышек вбит в землю, а верёвка имеет длину 4 м. На другом лугу тоже пасётся коза. Конец верёвки, к которой она привязана, скользит по проволоке, прикреплённой к двум колышкам. Расстояние между колышками — 6 м, а длина верёвки — 4 м. На сколько больше площадь участка, на котором может пастись коза, на втором лугу, чем на первом?

А. На 24 м^2. Б. На 9π м2. В. На 48 м^2. Г. На 12π м^2.

Решение

Площадь участка на первом лугу, на котором может пастись коза, — это площадь круга радиуса 4 м. Она равна 16π м^2.

Участок, на котором может пастись коза на втором лугу, изображён на рисунке.



Его площадь равна сумме площадей двух полукругов радиуса 4 м и прямоугольника размерами 6 м $\times$ 8 м. Площадь этого участка равна $(16\pi + 48)$ м^2. Она больше площади соответствующего участка на первом лугу на 48 м^2.

Ответ. В. На 48 м^2.

Комментарий:

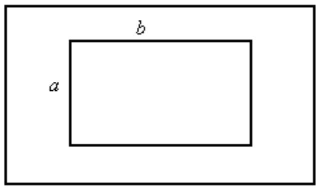
Около половины участников (51%) справились с данной задачей. Здесь для решения требовались знания геометрии, умение считать площади окружности и прямоугольника, ну и, конечно же, правильный рисунок.

Задача №11 (3 балла)

Дом, имеющий форму прямоугольника, площадь которого равна 225 м^2, расположен на участке прямоугольной формы так, что его стены параллельны участкам ограды, и каждый участок ограды удалён от ближайшей к нему параллельной стены дома на расстояние, равное одной трети длины смежной стены. Определите площадь участка.

А. 625 м^2. Б. 400 м^2. В. 375 м^2. Г. 81 м^2.

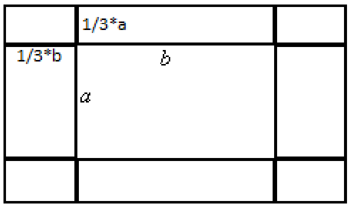
Решение



На рисунке изображено расположение дома на участке. Обозначим стороны прямоугольника, изображающего дом, через a и b. Тогда стороны прямоугольника, изображающие участки ограды, равны $a+\frac{2}{3}a=\frac{5}{3}a$ и $b+\frac{2}{3}b=\frac{5}{3}b$. Площадь, которую занимает участок, равна произведению этих сторон, то есть $\frac{5}{3}a\cdot\frac{5}{3}b=\frac{25}{9}ab$. По условию, площадь дома равна 225 м^2, то есть ab = 225. Поэтому площадь участка равна $\frac{25}{9}\cdot 225=625$ м^2.

Ответ. А. 625 м^2.

Комментарий:



С этой задачей справились 71% участников. Кроме знания формулы площади прямоугольника, тут больше ничего не требовалось. Задачу можно было решить и другим способом. Например, посчитать сумму площадей следующих прямоугольников, стороны которых даны в условии (см. рис.).

Задача №12 (3 балла)

В вазе лежало не более 70 конфет, из них 52% — шоколадных. Когда Маша съела 3 конфеты, то шоколадные конфеты, оставшиеся в вазе, составили ровно половину всех оставшихся конфет. Сколько всего конфет было в вазе вначале?

А. 50. Б. 45. В. 25. Г. 20.

Решение

Обозначим количество конфет в вазе через x. Тогда шоколадных конфет там $0{,}52x$ штук, а остальных — $0{,}48x$. Так как доля шоколадных конфет стала меньше, чем была, то из взятых Машей трёх конфет шоколадных могло быть или 3, или 2. Если Маша взяла 3 шоколадные конфеты, то шоколадных конфет осталось в вазе $0{,}52x - 3$, и это составило половину всех оставшихся конфет, то есть $0{,}52x - 3 = 0{,}48x$, или $0{,}04x = 3$, $x = 75$. Полученное значение не удовлетворяет условию, поскольку в вазе лежало не более 70 конфет. Следовательно, Маша взяла 2 шоколадные конфеты. Тогда имеет место равенство $0{,}52x - 2 = 0{,}48x - 1$, отсюда $x = 25$.

Ответ. В. 25.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить только 44% участников. Хотя есть очень простой способ ее решения. Опять же рассмотрим варианты ответов, предложенные в задаче. После того как маша съела 3 конфеты, шоколадных стало половина, значит всего конфет стало четное количество. Тогда изначально конфет было нечетное количество. Варианты 50 и 20 не подходят. Остается проверить 45 и 25. 52% от 45 это 11,25 – не целое число, значит, остается только вариант В.25. Пользуйтесь предложенными вариантами ответов в тестовых задачах, это часто может сильно упростить решение задачи.

Задача №13 (3 балла)

На Новый год Васе подарили столько конфет, что он мог их раздать всем своим одноклассникам по 12. Однако, разделить поровну между всеми учащимися класса ему бы не удалось: одна конфета оставалась бы лишней. Сколько конфет подарили Васе?

А. 168. Б. 156. В. 144. Г. 132.

Решение

Пусть в Васином классе $\underline{x}$ учащихся. Так как у него (x – 1) одноклассников, то при некотором натуральном k справедливо равенство

$$12(x-1) = kx + 1, \text{ или } (12-k)x = 13, \text{ или } x = \frac{13}{12-k}.$$

Так как x и k — натуральные числа, а 13 — простое число, то k = 11, x = 13. Следовательно, Васе подарили $11\cdot 13 + 1 = 144$ конфеты.

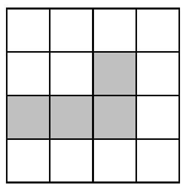
Ответ. В. 144.

Комментарий:

Только 38% участников выбрали правильный ответ в этой задаче. Задача довольно простая и заключается в том, чтобы среди предложенных вариантов ответа найти число, которое делится на 12 и в то же время дает остаток 1 при делении на 13. Решить ее можно было простым перебором.

Задача №14 (3 балла)

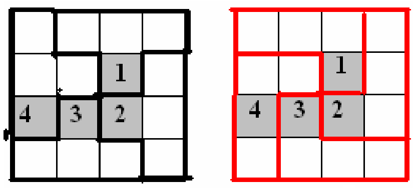
Сколькими способами можно разрезать квадрат, изображённый на рисунке, на 4 равные фигуры так, чтобы в каждую фигуру попало ровно по одному закрашенному квадратику?



А. Одним. Б. Двумя. В. Тремя. Г. Четырьмя.

Решение

На рисунке изображены два способа разрезания, соответствующие условию.



Существует пять видов фигур, состоящих из 4-х клеток, которые соединяются по сторонам. Они изображены на рис. 1 — 5.

Разрезать данный квадрат на фигуры, изображённые на рис.1, рис. 2, рис. 3, так, как это требуется в условии, невозможно. В этом можно убедиться, если начинать отрезать фигуру данного вида с части, содержащей квадратик 1.

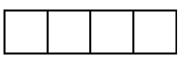


Рис. 1

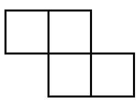


Рис. 2

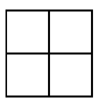


Рис. 3

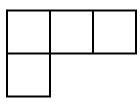


Рис. 4

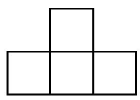


Рис. 5

Разрезания на фигуры, изображённые на рис. 4 и 5, однозначны. Для этого также достаточно начать отрезание фигуры данного вида с квадратика 1.

Ответ. Б. Двумя.

Комментарий:

В этой задаче правильный ответ указали 40% участников. Доказательство того, что третьего способа не существует не очевидное. Именно поэтому задача была предложена в тестовой части. Советую подробно разобраться с решением данной задачи.

Задача №15 (3 балла)

У Пети 4 игрушечные автомашины: зелёный и чёрный грузовики, зелёная и чёрная легковушки. Он выстраивает их в ряд для проверки их технического состояния. Сколькими способами он может это сделать так, чтобы рядом не стояли машины одинакового цвета?

А. 2-мя. Б. 4-мя. В. 6-ю. Г. 8-ю.

Решение

Обозначим Петины автомашины символами ЗГ, ЧГ, ЗЛ, ЧЛ. Все расположения, удовлетворяющие Петиным требованиям, имеют вид:

ЗГ ЧГ ЗЛ ЧЛ
ЗГ ЧЛ ЗЛ ЧГ
ЧГ ЗГ ЧЛ ЗЛ
ЧГ ЗЛ ЧЛ ЗГ
ЗЛ ЧГ ЗГ ЧЛ
ЗЛ ЧЛ ЗГ ЧГ
ЧЛ ЗГ ЧГ ЗЛ
ЧЛ ЗЛ ЧГ ЗГ

Других расположений, удовлетворяющих Петиным требованиям, нет. Всего 8 способов.

Ответ. Г. 8-ю.

Комментарий:

Эту задачу смогли решить 44% участников. Задача на комбинаторику. Ее решение без перебора всех вариантов выглядит следующим образом. Занумеруем по порядку места, на которых стоят машины 1, 2, 3 и 4. Чтобы рядом не стояли машины одинакового цвета, машины на местах 1 и 3 должны быть одного цвета. Его можно выбрать двумя вариантами. Тип машины на месте 1 можно также выбрать двумя вариантами (легковушка или грузовик). Так же тип машины на втором месте можно выбрать двумя вариантами. После выбора трех данных параметров расположение машин определяется однозначно. Значит, всего вариантов расположения машин будет $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Разбор задач из тестовой части заданий

8-9 класс

Тестовые задания

Ответь на вопросы, выбрав правильный вариант ответа.

Задача №1 (3 балла)

В классе из 25 учащихся 18 изучают английский язык, 15 — немецкий и 17 — французский. Для каждых двух языков найдётся ровно 5 учащихся, изучающих только эти два языка. Сколько учащихся изучают все три языка, если каждый учащийся изучал хотя бы один язык?

А. 6. Б. 5. В. 4. Г. 3.

Решение

Обозначим количество учащихся класса, изучающих ровно один язык, через x, а все три — через y. По условию, ровно два языка изучают $5\cdot 3 = 15$ учащихся, ровно один или все три языка — $25 - 15 = 10$ учащихся. Если предположить, что у каждого изучающего иностранный язык есть учебник по этому языку и притом только один, то учебников всего $18 + 15 + 17 = 50$. Из них по 30 учебникам учащиеся изучают ровно 2 языка. Имеем систему уравнений:

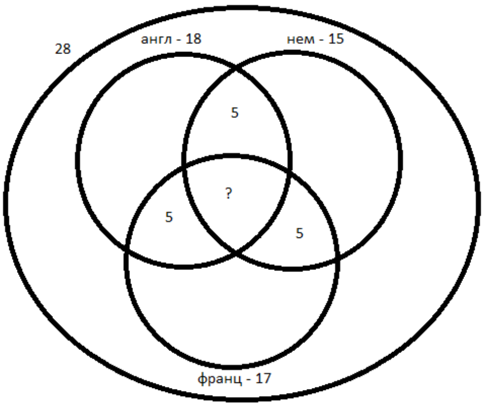
$$\begin{cases} x+3y=20, \\ x+y=10. \end{cases}$$

Вычитая из левых частей первого уравнения левые части второго, а из правых — правые, получим: $2y = 10$ или $y = 5$. Следовательно, три языка изучают 5 учащихся, а 5 учащихся изучают ровно один язык, причём трое изучают английский язык, а двое — французский.

Ответ. Б. 5.

Комментарий:

С этой задачей справились 75% участников. Решать подобные задачи довольно просто с помощью «кругов Эйлера».



На рисунке изображены группы, на которые делятся все учащиеся класса. Обозначив искомое количество учащихся за x, легко выразить количество учеников в каждой группе и составить нужное уравнение.

<u>Задача №2 (3 балла)</u>

Интервалы движения маршрутных такси по трём кольцевым маршрутам, начинающимся от автостанции, составляют 20, 30 и 40 минут. Сколько раз с 9-00 до 15-00 маршрутные такси одновременно находятся на автостанции, если одна из таких встреч состоялась в 11-20?

А. 3. Б. 4. В. 5. Г. 6.

Решение

Так как наименьшее общее кратное – НОК (20, 30, 40) = 120, то встречи маршрутных такси на автостанции проходят через 120 минут или 2 часа. Следовательно, в указанный период встречи были в 9-20, 11-20, 13-20, всего 3.

Ответ. А. 3.

Комментарий:

С этой задачей справились 76% участников. Задача на нахождение наименьшего общего кратного. Особых знаний и навыков тут не требовалось. Надо было только правильно посчитать время между двумя подряд идущими такими встречами и посчитать, сколько таких отрезков времени будет в указанном периоде.

<u>Задача №3 (3 балла)</u>

Первого сентября в одном из классов лицея собрались учащиеся, пришедшие из разных школ. Оказалось, что каждая девочка знакома с шестью девочками и девятью мальчиками. А каждый мальчик знаком с десятью девочками и семью мальчиками. Кого в классе больше — девочек или мальчиков?

А. Мальчиков. Б. Девочек. В. Одинаковое количество. Г. Определить невозможно.

Решение

Обозначим количество девочек через x, а количество мальчиков — через y. Представим, что все девочки вручили своим знакомым мальчикам карточки с адресами электронной почты. Из условия следует, что девочки раздали $9x$ карточек (каждая — девяти знакомым мальчикам), а мальчики получили всего $10y$ карточек (каждый от десяти знакомых девочек). Значит, $9x = 10y$. Отсюда следует, что $x > y$.

Ответ. Б. Девочек.

Комментарий:

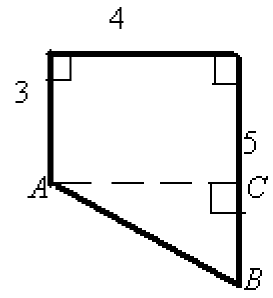
Простыми словами решение строиться на том, что количество знакомств мальчиков с девочками посчитано двумя разными способами. Количества мальчиков и девочек приняты за неизвестные. Остается только составить уравнение и выразить одну неизвестную через другую. С этой задачей справились только 41% участников.

<u>Задача №4 (3 балла)</u>

Аэроплан поднялся на высоту 1 км и пролетел 3 км на север, опустился на высоту 600 м и пролетел 4 км на восток, поднялся на высоту 2 км, пролетел 5 км на юг и приземлился. На каком расстоянии с точностью до 100 м он оказался от места взлёта?

А. 4,0 км. Б. 4,3 км. В. 4,5 км. Г. 5,0 км.

Решение



На рисунке изображена проекция на землю маршрута движения аэроплана. Искомое расстояние находим по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике *ABC*:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5 \text{ км.}$$

Ответ. В. 4,5 км.

Комментарий:

Простая задача по геометрии. Ее смогли решить 80% участников.
Для удобства поиска конечной точки аэроплана, условия можно рассматривать в двух разных измерениях. Первое это высота аэроплана, второе это его движение в горизонтальной плоскости. После подсчета получится два перпендикулярных отрезка, на длину которых сместился аэроплан по вертикали и по горизонтали. Останется только найти гипотенузу полученного прямоугольного треугольника. Кроме знания теоремы Пифагора в задаче ничего особенного не требовалось.

<u>Задача №5 (3 балла)</u>

В классе мальчиков вдвое больше, чем девочек. Известно, что при случайном выборе двух дежурных вероятность того, что оба выбранных окажутся девочками, равна 10%. Сколько в классе учащихся?

А. 15. Б. 18. В. 24. Г. 21.

Решение

Обозначим количество девочек в классе через x, тогда мальчиков в классе $2x$, а всего учащихся $3x$. Двух дежурных можно выбрать $\dfrac{3x(3x-1)}{2}$ способами, а двух девочек — $\dfrac{x(x-1)}{2}$ способами. Так как вероятность события равна отношению количества исходов опыта, при которых наступает это событие, к общему количеству равновозможных исходов опыта, то, по условию, $\dfrac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{3x(3x-1)}{2}} = 0{,}1$ или $10x - 10 = 9x - 3$, или $x = 7$.

Следовательно, в классе 7·3 = 21 учащийся.

Ответ. Г. 21.

Комментарий:

59% участников решили эту задачу. В этой задаче можно было просто посчитать вероятность того, что при случайном выборе двух дежурных, оба выбранных окажутся девочками, для каждого предложенного варианта ответа. После чего выбрать тот, при котором она равна 10%.

<u>Задача №6 (3 балла)</u>

Две электрички выехали со станции в одном направлении с интервалом в 10 минут и двигались со скоростью 54 км/ч. С какой скоростью двигался встречный товарный поезд, если он встречал электрички через 6 минут одну после другой?

А. 144 км/ч. Б. 72 км/ч. В. 48 км/ч. Г. 36 км/ч.

Решение

Расстояние между электричками равно $54\cdot\frac{1}{6}=9$ км. Обозначим скорость встречного поезда через *x* км/ч. Тогда скорость сближения поезда и электрички равна (*x* + 54) км/ч. Имеем уравнение: $\frac{1}{10}\cdot(x+54)=9$ или *x* = 36 км/ч.

Ответ. Г. 36 км/ч.

Комментарий:

Эту задачу решили 77% участников. После подсчета расстояния между электричками, для удобства можно рассматривать скорость встречного поезда относительно электричек. Тогда данное расстояние он должен пройти за 6 минут. Воспользовавшись формулой для равномерного прямолинейного движения $S=v\cdot t$, найти скорость поезда относительно электричек, после чего останется вычесть из полученного числа скорость электрички.

<u>Задача №7 (3 балла)</u>

В два сосуда налита вода. Если вначале половину воды первого сосуда перелить во второй, а затем треть содержимого второго сосуда перелить в первый, то в обоих сосудах будет по 6 л воды. В каком сосуде вначале было больше воды?

А. В первом. Б. Одинаковые объёмы. В. Во втором. Г. Определить невозможно.

Решение

Обозначим объём воды в первом сосуде через *x* л, а во втором — через *y* л. Составим таблицу, моделирующую переливания.

Сосуд	Вначале	После 1 переливания	После 2 переливания
Первый	x	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+y\right)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y$
Второй	y	$\frac{1}{2}x+y$	$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+y\right)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y$

По условию, имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=6,\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=6.\end{cases}\quad \text{или} \quad \begin{cases}2x+y=18,\\ x+2y=18.\end{cases}$$

Вычитая левые и правые части уравнений, получим уравнение *x* – *y* = 0. Следовательно, вначале объёмы воды в сосудах были одинаковые.

Ответ. Б. Одинаковые объёмы.

Комментарий:

В этой задаче 71% участников указали верный вариант ответа. Задачу можно решить и без составления уравнений. Вторым переливанием треть содержимого второго сосуда перелили в первый, значит, в нем осталось две трети, а по условию это 6 литров. Значит, после первого переливания в первом сосуде было 3 литра, а во втором 9 литров. Во время первого переливания из первого сосуда перелили половину, значит осталась половина, мы уже знаем, что это 3 литра. Отсюда получаем, что до переливаний в сосудах было по 6 литров.

Задача №8 (3 балла)

Роман купил несколько пицц по 39 руб. за штуку и несколько тортов по 99 руб. за каждый. Всего он израсходовал более 350 руб., но меньше 370 руб. Сколько изделий кулинарии купил Роман?

А. 5. Б. 6. В. 7. Г. 8.

Решение

Обозначим количество купленных пицц через x, а количество тортов — через y. Тогда из условия следует равенство $39x + 99y = 351 + a$, где $0 \le a \le 18$, или $13x + 33y = 117 + \frac{a}{3}$.

Очевидно, что $y \le 3$. Если $y = 3$, то $13x = 117 - 99 + \frac{a}{3} = 18 + \frac{a}{3} \le 24$. Полученное уравнение не имеет натуральных решений.

Так как $y \ge 2$, то при $y = 2$ имеем уравнение $13x = 117 - 66 + \frac{a}{3} = 51 + \frac{a}{3} \le 57$.

Полученное уравнение имеет единственное решение в множестве натуральных чисел: $x = 4$. Следовательно, Роман купил 4 + 2 = 6 изделий.

Ответ. Б. 6.

Комментарий:

Довольно простая задача. Решается она недолгим перебором. Правильный ответ здесь указали 88% участников.

Задача №9 (3 балла)

Прямоугольный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на 2 части и так делают несколько раз. Какое наименьшее количество разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось два десятиугольника?

А. 10. Б. 11. В. 12. Г. 13.

Решение

Один десятиугольник можно получить, сделав 6 разрезов. Для этого нужно от данного листа отрезать 4 вершины («уголки»), а затем от полученного восьмиугольника отрезать 2 вершины. Чтобы получить два десятиугольника, достаточно сначала лист разрезать на два четырёхугольника, а затем из каждого из них получить десятиугольник указанным способом. Всего потребуется 13 разрезов.

Получить два десятиугольника 12-ю разрезами нельзя. Это следует из того, что у них 20 вершин, а вначале у листа было 4 вершины. За один разрез количество вершин одного куска можно увеличить только на 1. Четыре вершины образуются при разрезании на две части по прямой, не проходящей через вершины.

Для получения двух десятиугольников обязательно нужно сделать такой разрез. Оставшиеся 20 – 4 – 4 = 12 вершин могут быть получены с помощью 12 разрезов. Всего потребовалось 13 разрезов. Более, чем один разрез, не проходящий через вершины листа, увеличивает общее количество необходимых разрезов.

Ответ. Г. 13.

Комментарий:

Эту задачу решили около половины участников (53%). Самое важное здесь, понять, как изменяется количество вершин при том или ином разрезе. После нескольких экспериментов интуитивно это становится понятно, но доказать не просто. Именно поэтому задача была предложена в тестовой части.

Задача №10 (3 балла)

В школе 1000 учащихся занимаются в различных школьных кружках и секциях. Кружков и секций, где занимается по 20 человек, в 10 раз меньше, чем тех, которые насчитывают в своём составе по 10 человек. В остальных кружках и секциях по 50 человек. Сколько кружков и секций в школе?

А. 54. Б. 55. В. 58. Г. 63.

Решение

Обозначим количество кружков и секций, в которых насчитывается 20 и 50 человек, через x и y соответственно. Тогда по 10 учащихся в $10x$ кружках и секциях. По условию, имеет место равенство: $20x + 100x + 50y = 1000$, или $120x + 50y = 1000$, или $12x + 5y = 100$. Из последнего равенства вытекает, что $x \leq 8$, кроме того, x делится на 5. Отсюда следует, что $x = 5$, тогда $y = 8$. Итак, по 20 человек в 5 кружках и секциях, по 10 человек — в 50, по 50 человек — в 8, всего в школе 63 кружка и секции.

Ответ. Г. 63.

Комментарий:

С этой задачей справились 79% участников. Задачу можно решить перебором. Если заметить, что на каждую секцию с 20 учащимися, есть 10 секций с 10 учащимися, то есть для обеспечения наличия каждой секции с 20 учащимися требуется 120 человек. Отсюда становится понятно, что таких секций не может быть больше 8. Остается перебрать 8 вариантов.

Задача №11 (3 балла)

Какой угол образовывали часовая и минутная стрелки, если через 20 минут они образовывали такой же угол?

А. 55° или 125°. Б. 55°. В. 125°. Г. 65° или 115°.

Решение

За 20 минут — треть часа — минутная стрелка повернётся на треть полного оборота, то есть на 120°. А часовая стрелка — всего на 10°, так как движется в 12 раз медленнее. При этом минутная стрелка может успеть обогнать часовую стрелку (рис. 1) или нет (рис. 2). На рисунках жирными линиями показано начальное положение стрелок, тонкими — их положение через 20 минут. Пусть первоначально угол между стрелками был равен α. Тогда в первом случае получаем уравнение $2\alpha + 10° = 120°$, откуда $\alpha = 55°$. Во втором случае $2\alpha - 10° + 120° = 360°$, откуда $\alpha = 125°$.

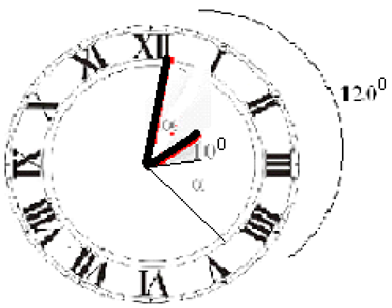


Рис. 1

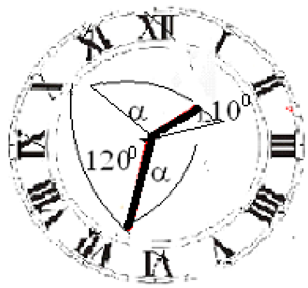


Рис. 2

Ответ. А. 55° или 125°.

Комментарий:

В этой задаче только 22% участников указали правильный ответ. Основная ошибка была в том, что участники нашли только ответ, соответствующий рисунку 1, когда минутная стрелка обгоняет часовую стрелку. И не учли, что возможен второй вариант, при котором условие выполняется.

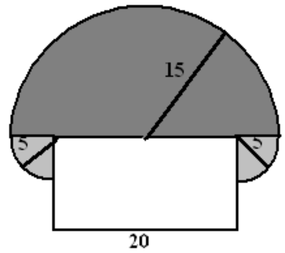
Задача №12 (3 балла)

Посередине стены дома длиной 20 м, ширина которого 10 м, находится электрическая розетка. Шнур длиной 15 м соединяет с розеткой электрокосилку. Наибольшая площадь газона, которую можно скосить этой косилкой, приближённо равна … (выберите наиболее точное значение)

А. 492 м^2. Б. 442 м^2. В. 392 м^2. Г. 342 м^2.

Решение

Множество точек, до которых может достать шнур, изображено на рисунке.



Искомая площадь равна полусумме площадей кругов радиусов 15 м и 5 м: $S=\frac{1}{2}\left(225\pi+25\pi\right)=125\pi\approx 392$ м^2.

Ответ. В. 392 м^2.

Комментарий:

64% участников справились с этой задачей. В подобных задачах очень важно суметь построить правильный рисунок. Зная формулы площадей различных фигур и имея правильный рисунок, задачу решить не составит трудностей.

Задача №13 (3 балла)

Неопытный предприниматель закупил партию яиц и, продав их по цене 40 зедов за десяток в связи с падением спроса, получил убыток в 800 зедов (зед — условная денежная единица). Вторую такую же партию предприниматель в связи с ростом спроса сумел продать по 50 зедов за десяток, и его прибыль составила 1200 зедов. По какой цене нужно продавать десяток яиц, чтобы получить прибыль 2000 зедов от продажи такой же партии яиц?

А. 60 зедов. Б. 56 зедов. В. 54 зеда. Г. 52 зеда.

Решение

Обозначим через x количество десятков яиц в приобретенной партии, а через y зедов — цену десятка яиц, по которой предприниматель покупал их. Тогда $x\cdot y$ зедов заплатил предприниматель за каждую партию купленных яиц, а $40x$ зедов и $50x$ зедов соответственно получил предприниматель после продажи первой и второй партии. Из условия имеем систему уравнений: $\begin{cases} xy-40x=800, \\ 50x-xy=1200. \end{cases}$ Сложив левые и правые части уравнений, получим: $10x = 2000$, $x = 200$. Тогда из первого уравнения получаем: $y=\frac{800+40x}{x}=\frac{800+40\cdot 200}{200}=44$ (зеда).

Обозначим через z зедов искомую цену десятку яиц, обеспечивающую прибыль в 2000 зедов. Имеем уравнение: $xz - xy = 2000$. Отсюда $z=\frac{2000+xy}{x}=\frac{2000+44\cdot 200}{200}=54$ зеда. Следовательно, чтобы получить указанную прибыль, предприниматель должен продавать десяток яиц по 54 зеда.

Ответ. В. 54 зеда.

Комментарий:

Стандартная задача на составление системы уравнений. Такие задачи просто необходимо уметь решать. С нею справились 71% участников.

Задача №14 (3 балла)

Можно ли на чашечных весах с помощью гирь 32 г и 56 г (эти гири имеются в неограниченном кол-ве, и их можно класть на обе чашки весов) отвесить: 1)140 г; 2) 176 г?

А. 1) Нет; 2) да. Б. 1) Да; 2) нет. В. 1) Да; 2) да. Г. 1) Нет; 2) нет.

Решение

1) Предположим, что можно с помощью гирь 32 г и 56 г отвесить 140 г. Тогда имеет место равенство $32x + 56y = 140$, где x и y — целые числа (они могут быть как положительными, так и отрицательными). Так как левая часть равенства делится, а правая не делится на 8, то ни при каких целых значениях x и y равенство не выполняется. Следовательно, 140 г нельзя отвесить с помощью указанных гирь.

2) Аналогично предыдущему, имеем равенство: $32x + 56y = 176$, где x и y — целые числа. Разделив обе части равенства на 8, получим: $4x + 7y = 22$. Очевидно, что это равенство выполняется при $x = y = 2$. Значит, 176 г можно отвесить с помощью указанных гирь.

Ответ. А 1) Нет; 2) да.

Комментарий:

Эта задача оказалась одной из самых простых. Ее смогли решить 80% участников.

Задача №15 (3 балла)

Антон, Борис, Владимир и Геннадий участвовали в соревновании по гимнастике. После окончания соревнований выяснилось, что Антон набрал больше баллов, чем Борис и Владимир вместе, но Антон и Борис вместе набрали столько же баллов, сколько Владимир и Геннадий вместе. Кроме того, Борис и Геннадий вместе набрали больше баллов, чем Антон и Владимир вместе. Расположите гимнастов по убыванию количеств набранных ими баллов.

А. Геннадий, Антон, Борис, Владимир. Б. Геннадий, Антон, Владимир, Борис.

В. Антон, Геннадий, Борис, Владимир. Г. Антон, Геннадий, Владимир, Борис.

Решение

Обозначим количества баллов, набранных указанными участниками соревнований, первыми буквами их имён: А, Б, В, Г. По условию, имеем:

$$А > Б + В; \qquad (1)$$

$$А + Б = В + Г; \qquad (2)$$

$$Б + Г > А + В. \qquad (3)$$

Из неравенства (1) вытекает: А > Б, А > В, то есть Антон в расположении гимнастов по убыванию количеств набранных ими баллов занимает первое или второе место.

Вычитая из равенства (3) неравенство (2), после несложных преобразований получим: 2А < 2Г или А < Г. Итак, Геннадий в искомом расположении занимает первое место, Антон — второе. Так как А < Г, то из равенства (2) вытекает, что В < Б.

Следовательно, искомое расположение имеет вид: Геннадий, Антон, Борис, Владимир.

Ответ. А. Геннадий, Антон, Борис, Владимир.

Комментарий:

Эту задачу решили 67% участников. В данной задаче достаточно было выписать три неравенства, которые даны в условии, и проверить для каждого варианта ответа выполняются ли данные неравенства. Очевидно, что для ответов **Б** и **В** неравенство (2) выполняется только когда А=Г и Б=В, что противоречит неравенству (3). Для варианта ответа Г неравенство (3) не выполняется никогда. Остается только ответ **А**.