Золотой ключик

Всероссийский математический конкурс

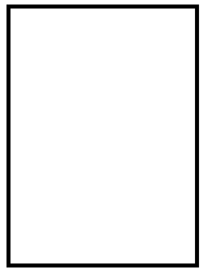
Разбор задач пятой части заданий

1 4-5 класс

<u>**Задача №6.**</u>

Число, выражающее площадь прямоугольной комнаты в м2, на единицу больше числа, выражающего периметр этой комнаты в м. Каковы размеры комнаты, если её длина и ширина выражаются целыми числами метров?

Решение 1:



Предположим, что прямоугольник на рисунке справа является изображением комнаты. Его площадь равна произведению длин его сторон, а периметр – их удвоенной сумме. Следовательно периметр выражается чётным числом метров. Но, по условию, число, выражающее площадь комнаты в м2, на единицу больше числа, выражающего периметр этой комнаты в м. Следовательно, число, выражающее площадь, нечётно, а отсюда следует, что и длины сторон выражаются нечётными числами. Учитывая, что длина и ширина комнаты не могут равняться 1 м, а, следовательно, они не менее 3 м, осталось проверить, для каких из следующих чисел 3, 5, 7, 9, … произведение на 1 больше удвоенной суммы. Проверку выполним с помощью таблицы.

Длина	3	3	3	3	3	5	5	5	5	7	7	[illegible]
Ширина	3	5	7	9	11	5	7	9	11	7	9	[illegible]
Периметр	12	16	20	24	28	20	24	28	32	28	32	[illegible]
Площадь	9	15	21	27	33	25	35	45	55	49	63	[illegible]

Из таблицы видно, что число, выражающее площадь, на единицу больше числа, выражающего периметр, если комната имеет размеры 3×7.

Ответ. 3×7 м.

<u>**Комментарий**</u>

В одной из работ было приведено очень оригинальное решение, с которым я хотел бы вас ознакомить.

Для начала убедимся в том, что стороны прямоугольника имеют длину не меньше 3. Так как длина и ширина комнаты выражаются целыми числами, то периметр комнаты будет четным числом. Мы знаем, что площадь комнаты на единицу больше периметра значит, площадь выражается нечетным числом. Получаем, что длина и ширина комнаты – нечетные числа. Пусть размеры комнаты m и n. Из условия мы знаем, что m*n=2*(m+n)+1. Если одна из сторон равна 1, то m*1=2*(m+1)+1, то есть m=2*m+1. Данное уравнение не имеет решения среди целых положительных чисел. Таким образом, мы получили, что каждая сторона прямоугольника имеет длину не меньше 3. Рассмотрим прямоугольник со сторонами n-2 и m-2. Его площадь равна (n-2)*(m-2)=n*m-2*n-2*m+4. Подставив вместо m*n выражение 2*(m+n)+1 (они равны по условию) получим, что площадь прямоугольника со сторонами n-2 и m-2 равна 2*(m+n)+1-2*n-2*m+4=5. Так как 5 является простым числом, то стороны такого прямоугольника равны 1 и 5. А значит, стороны искомого прямоугольника равны 3 и 7.

Многие участники конкурса дали правильный ответ в этой задаче, но не дали никаких пояснений. Естественно они не получили за это много баллов. Если вы решаете задачу перебором, приводите в решении проделанный перебор, и лучше, если он будет полный, ведь вы не доказываете отсутствие ответов среди нерассмотренных случаев. Многие почему-то дали ответ 3 и 6, видимо посчитав, что периметр должен быть равен площади. Некоторые дали ответ 3 и 5, видимо посчитав, что периметр на единицу больше площади. Внимательно читайте условие. Читайте его несколько раз. Проверяйте, удовлетворяют ли ваши ответы условию. Это избавит вас от настолько глупых ошибок.

Задача №7.

Восемь мальчиков выстроились по кругу. Если обходить их, двигаясь по часовой стрелке, то окажется, что:

А мы встретим раньше Б и В,
Б – после К через одного;
Л – раньше А, но после Д;
В – после М через одного;
Д – раньше Б;
В – раньше, чем Г;
М – после К.
Кого мы встретим первым и кого последним?

Решение:

На рис. 1 изображено расположение мальчиков. Если обход начать в любой точке дуги ГД, то убедимся, что выполняются все условия. Но если начать обход из любой другой точки окружности, обязательно обнаружим нарушение каких-то условий. Следовательно, первым встретим Д, а последним – Г.

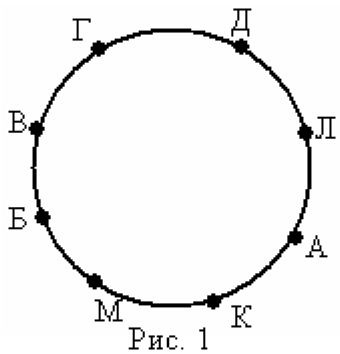


Рис. 1

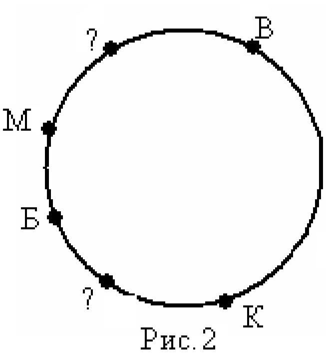


Рис.2

Покажем, что другого расположения мальчиков по кругу, удовлетворяющего всем условиям, не существует. Пусть Б находится не между В и М. Тогда, двигаясь по часовой стрелке, мы встречаем В после М через одного, М – после К и Б – после К через одного (см. рис. 2). Так как А встречаем раньше Б, Д и Л – раньше А, а В – раньше Г, то между В и М некого поставить. Пришли к противоречию. Следовательно, Б стоит между В и М. Из условий: Л – раньше А, но после Д, А мы встретим раньше Б и В, В – раньше, чем Г получаем размещение, изображённое на рис. 1.

Ответ. Первым – Д, последним – Г.

Комментарий

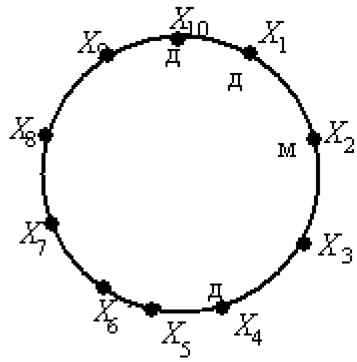
Очень многие дали правильный ответ в этой задаче. Но лишь единицы из них попытались доказать, что такое расположение единственное. Хотя это надо было сделать обязательно. Ведь если бы задача имела несколько решений, то найдя одно из них нельзя утверждать, что мальчики располагались именно так.

Задача №8.

За круглым столом вам нужно посадить 10 гостей, среди которых 5 мальчиков и 5 девочек. Можно ли рассадить их так, чтобы ни у одного гостя обоими соседями не были мальчики?

Решение 1:

Предположим, что требуемое рассаживание возможно. Обозначим через X1, X2, X3, …, X10 гостей, сидящих в указанном порядке за круглым столом при движении по часовой стрелке (см. рис.). Обозначения можно выбрать так, что X1 – девочка, а X2 – мальчик. Этот выбор не ограничивает общности рассуждений. Тогда X10 – обязательно девочка, ибо в противном случае у X1 оба соседи будут мальчики. Кто бы ни был X3, X4 – девочка.



Если X3 – мальчик, то X5 – девочка. Но тогда среди гостей X6, X7, X8, X9 – одна девочка, и её соседями являются мальчики.

Если X3 – девочка, то среди гостей X5, X6, X7, X8, X9 только одна девочка (всего за столом 5 девочек) и в любом случае соседями одного из гостей будут мальчики. Снова получено противоречие.

Ответ. Нельзя.

Решение 2:

Для начала пронумеруем места за столом от 1 до 10. Рассмотрим две группы людей, первая – сидящие на четных местах, вторая – на нечетных местах. Так как мальчиков по условия 5, то в одной из групп их будет не меньше чем 3. Чтобы соблюдалось условие задачи, необходимо чтобы у каждого мальчика ближайшими соседями из той же группы что и он были девочки. Но так как в одной из групп мальчиков больше чем девочек, то это невозможно.

Очень просто объяснить почему это так. Пусть за круглым столом сидят 5 человек, среди которых есть 3 мальчика. Пронумеруем места по порядку от 1 до 5 (допустим по часовой стрелке), начиная с любого мальчика. Так как на месте номер 1 сидит мальчик, то на местах с номерами 2 и 5 должны сидеть девочки. Но так как количество мальчиков не меньше 3, то на местах 3 и 4 сидят мальчики.

Таким образом мы доказали что есть мальчик у которого ближайший сосед той же группы (слева либо справа) будет тоже мальчик. Значит у человека из другой группы, сидящего между ними оба соседа мальчики.

Ответ: нельзя.

Решение 3:

Назовем «группой мальчиков(девочек)» мальчиков(девочек) сидящих подряд при условии того что справа и слева от них сидят девочки(мальчики). Заметим, что в каждой группе мальчиков не может быть более двух человек, иначе в этой группе будет мальчик, соседи которого тоже мальчики. Также заметим, что в каждой группе девочек не менее двух девочек, иначе, если она одна, то ее соседи мальчики.

Итак, раз по условию 5 девочек, то они могут составлять не более двух групп девочек. В то время как, групп мальчиков не может быть менее трех (так как мальчиков всего 5, а в каждой группе не более двух). После каждой группы девочек должна идти группа мальчиков и наоборот. Но так как групп девочек меньше чем групп мальчиков то это невозможно. Получили противоречие.

Ответ: нельзя.

Комментарий

Практически у всех участников решение данной задачи ограничивалось словом «да» либо «нет». Некоторые еще приводили 1 или 2 примера. Мало кто смог привести нормальное решение. Хотя способов решения этой задачи довольно много.

Учитесь правильно выражать свои мысли. Уделите решению больше времени. При необходимости введите свою терминологию, но дайте четкие определения. Это не только поможет вам получить большее количество баллов на конкурсах, но и также поможет грамотно общаться с людьми, излагать свои мысли так, чтобы окружающие вас понимали и не задавали лишних вопросов.

Задача №9.

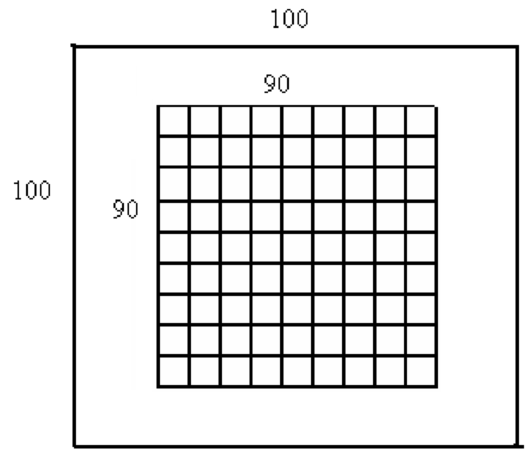
Сад имеет форму квадрата со стороной 100 м. Расстояние между любыми двумя деревьями в саду не меньше 10 м. Все деревья растут на расстоянии не менее 5 м от ограды в рядах, параллельных ограде. Какое наибольшее число деревьев может быть в саду?

Комментарий

Данная задача вызвала много вопросов. В условии не было объяснено, что значит «в рядах, параллельных ограде». Отсюда возникло множество разных, но, казалось бы, правильных ответов. Оригинал решения выглядел так:

Решение 1:

Пусть квадрат со стороной 100 м на рисунке справа является изображением сада. Тогда точки, удалённые от сторон квадрата на 5 м, образуют квадрат со стороной 90 м. Если разбить стороны меньшего квадрата на 9 равных частей и через точки деления провести отрезки, параллельные его сторонам, то точки пересечения этих отрезков между собой и со сторонами квадрата, а также 4 вершины квадрата, могут служить изображениями мест посадки деревьев. Их 100. Это наибольшее число деревьев, которое может быть посажено в саду.



Ответ. 100.

Комментарий

Также имело место решение в котором деревья располагались несколько иначе.

Решение 2:

Для расположения деревьев мы имеем квадрат 90x90.

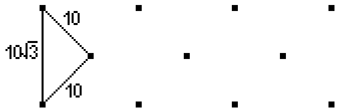


рис. 1

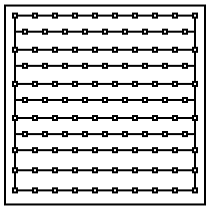


рис. 2

Если располагать деревья так, как показано на рисунке 1, то можно вместить большее количество деревьев. Таким образом, мы сможем разместить 7 рядов по 10 деревьев и 4 ряда по 9 деревьев (как показано на рисунке 2). Расстояние между рядами с 10 деревьями и с 9 деревьями равно $5\sqrt{3}$. Таких промежутков 8 и их сумма меньше 70. Значит, на оставшемся месте можно разместить 2 ряда по 10 деревьев. 7*10+4*9=106.

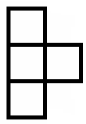
Ответ: 106.

<u>Комментарий</u>

В данной задаче ставился максимальный балл за любой пример, который удовлетворял условию и включал в себя не менее 100 деревьев. Большинство участников смогли построить такой пример.

По-хорошему, решение данной задачи должно включать в себя доказательство того, что большее количество деревьев нельзя расположить так, чтобы все условия соблюдались. Но это задача точно не для 4-5 классов, поэтому мы решили опустить этот момент. Доказательство этого факта я не буду приводить, так как оно содержит формулы из геометрии, с которыми, думаю, вы еще не знакомы.

<u>Задача №10.</u>



Сколько существует различных квадратов, длины сторон которых выражаются целыми числами сантиметров, площади которых не превышают 40 см2, которые можно разрезать на части, равные фигуре, изображённой на рисунке и состоящей из четырёх квадратов со стороной 1 см?

Решение 1:

Существует 6 квадратов, длины сторон которых выражаются целыми числами сантиметров, площади которых не превышают 40 см2. Длины их сторон равны 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 5 см, 6 см. Они состоят из 1, 4, 9, 16, 25, 36 квадратных единиц, то есть квадратиков со стороной 1 см.

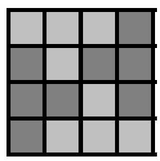


Рис. 1

Если квадрат можно разрезать на равные части, то его площадь должна нацело делиться на площадь, в данном случае на 4. Это требование выполнено для трёх квадратов: 2×2, 4×4, 6×6.

Квадрат 2×2, очевидно, требованиям задачи не удовлетворяет.

Разрезание квадрата 4×4 на части, равные данной фигуре, показано на рис. 1.

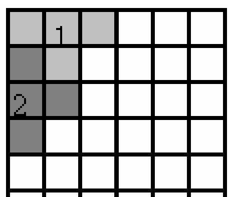


Рис. 2

Квадрат 6×6 нельзя разрезать на равные части, равные данной фигуре. Установить это можно, начав покрытие квадрата 6×6 фигурами указанного вида. Без ограничения общности можно считать, что одна плитка лежит в левом верхнем углу, как показано на рис. 2. Тогда расположение плитки 2 однозначно. Но тогда нижний левый угол квадрата покрыть данными фигурами невозможно.

Ответ. 1.

Решение 2:

Так как площадь квадратов со стороной больше 6 см превышает 40 см2, то искомые квадраты имеют сторону не больше 6 см. Площадь фигуры 4 см2, значит площади искомых квадратов должны делиться на 4. Таким образом, отсеиваются квадраты со стороной 1 см, 3 см, и 5 см. Рассмотрим квадраты со сторонами 2 см, 4 см и 6 см. Выполним в них шахматную раскраску. Заметим, что при любом расположении данной фигуры из четырех клеток, она покрывает 3 клетки одного цвета и одну клетку другого. Назовем фигуру четной, если она покрывает 3 черных клетки и 1 белую, нечетной – если 1 черную клетку и 3 белых. Так как в квадратах со стороной 2 см, 4см и 6 см количества черных и белых клеток равны между собой, то количества четных и нечетных фигур в покрытии должны совпадать. Тогда количество покрытых клеток одного цвета должно делиться на 4 (так как четная и нечетная фигуры покрывают вместе по 4 клетки каждого цвета). Количество черных клеток в квадратах со стороной 2 см и 6 см не делится на 4. Таким образом, остается только квадрат со стороной 4 см. Для него строится пример (смотрим решение 1).

<u>Комментарий</u>

Большинство участников построили пример покрытия квадрата 4х4, но не доказали, что остальные квадраты не подходят. Может быть не так уж и просто доказать, что квадрат 6х6 не имеет такого покрытия фигурками, но с остальными квадратами не должно возникать проблем. Если бы эти участники объяснили, почему не подходят квадраты со сторонами 1, 2, 3 или 5, то их итоговый результат стал бы выше. Так что советую вам приводить доказательства в тех случаях, в которых вы можете. Это повлияет на ваш результат только в положительную сторону.

2 6-7 класс

Задача №6.

Среди задач конкурсного задания по математике есть алгебраические и геометрические. Среди них есть трудные и лёгкие. Можно ли среди них выбрать две такие задачи, которые были бы из разных разделов математики (из алгебры и геометрии) и разной трудности?

Решение:

Рассмотрим совокупности алгебраических и геометрических задач. Если они обе состоят из задач одинаковой трудности, то достаточно взять из каждой совокупности по одной задаче, и мы получим искомый набор двух задач.

Если, например, среди алгебраических задач есть задачи различной трудности, то, взяв любую геометрическую задачу, можно выбрать алгебраическую задачу иной трудности.

Ответ. Можно.

Комментарий

Задача довольно простая. Но, тем не менее, многие участники сочли достаточным привести только ответ «да». А как же доказательство? Не игнорируйте доказательства там, где задание требует его привести. Тем более в простых задачах. Ответы без доказательства ничего не стоят, особенно в задачах, в которых спрашивается «да или нет?».

Задача №7.

На четырёх стенах комнаты и на её потолке нужно наклеить различное количество снежинок так, чтобы на каждой стене была хотя бы одна снежинка, но не более 7, а суммы количеств снежинок на противоположных стенах были равны и равнялись числу снежинок на потолке. Сколько существует различных вариантов выполнения этого задания, если различные варианты отличаются числом снежинок хотя бы на одной стене?

Решение:

Если обозначить через ($a1$, $b1$), ($a2$, $b2$) количества снежинок на противоположных стенах, то, по условию, выполняются соотношения

$a1 + b1 = a2 + b2$, $1 \le a1 \le 7$, $1 \le a2 \le 7$, $1 \le b1 \le 7$, $1 \le b_2 \le 7$.

Количество снежинок на потолке равно сумме $a1 + b1$. Сумма $a1 + b_1$ может принимать значения от 5 до 11. Числа 3, 4, 12 и 13 можно представить в виде суммы различных натуральных чисел, не больших 7, только одним способом. Следовательно, в этих случаях нельзя выбрать две указанные пары.

Пусть $a1 + b_1 = 11$. Так как $11 = 7 + 4 = 6 + 5$ и других вариантов записи числа 11 в виде суммы двух различных натуральных чисел, не больших 7, нет, то в этом случае существует один вариант выбора двух пар чисел, удовлетворяющих условию: (7, 4), (6, 5).

Пусть $a1 + b_1 = 10$. Так как $10 = 7 + 3 = 6 + 4$, то в этом случае существует один вариант выбора двух пар чисел, удовлетворяющих условию: (7, 3), (6, 4).

Пусть a1 + b_1 = 9. Так как 9 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4, то в этом случае существует три варианта выбора двух пар чисел, удовлетворяющих условию: (7, 2), (6, 3), (5, 4).

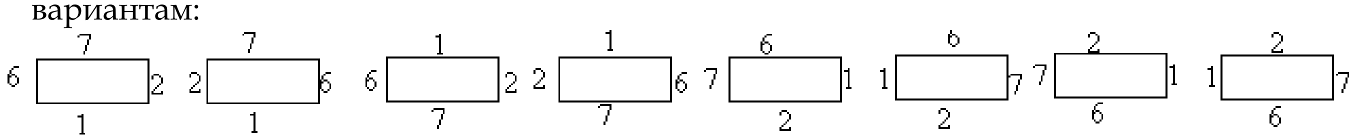
Пусть a1 + b_1 = 8. Так как 8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3, то в этом случае существует три варианта выбора двух пар чисел, удовлетворяющих условию: (7, 1), (6, 2), (5, 3).

Пусть a1 + b_1 = 7. Так как 7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3, то в этом случае существует три варианта выбора двух пар чисел, удовлетворяющих условию: (6, 1), (5, 2), (4, 3).

Пусть a1 + b_1 = 6. Так как 6 = 5 + 1 = 4 + 2, то в этом случае существует один вариант выбора двух пар чисел, удовлетворяющих условию: (5, 1), (4, 2).

Пусть a1 + b_1 = 5. Так как 5 = 4 + 1 = 3 + 2, то в этом случае существует один вариант выбора двух пар чисел, удовлетворяющих условию: (4, 1), (3, 2).

Всего 13 вариантов. Каждый вариант приводит к восьми вариантам расклейки снежинок на стенах. Например, вариант (6, 2) и (7, 1) приводит к следующим вариантам:



Всего имеем 13·8 = 104 варианта выполнения задания.

Комментарий

Задача не сложная. Здесь только нужно внимательно посчитать все возможные варианты. Большинство участников с этим заданием справились. Хотя опять же почему-то не сочли нужным приводить свой способ решения.

Задача №8.

Спецотряду из двенадцати солдат нужно одновременно добраться в пункт назначения, находящийся в 40 км от их места расположения. В их распоряжении есть только автомобиль, которым управляет водитель, не входящий в этот спецотряд, который вмещает 4 солдат и движется со скоростью 40 км/ч. Скорость движения солдат пешком равна 8 км/ч. Какое наименьшее время понадобится для выполнения задания?

Решение 1:

Можно предложить такой план действий.

1) В течение 36 мин машина перевозит 4-х солдат на 24 км, остальные 8 солдат за это время проходят расстояние, равное $8\cdot\frac{3}{5}=4,8$ км.

2) Расстояние между машиной и 8-ю солдатами составляет 24 – 4,8 = 19,2 км. Машина выезжает навстречу 8-и солдатам, скорость их сближения составляет 48 км/ч. Они встретятся через 19,2:48 = 0,4 (ч) или через 24 мин. Четверо перевезенных солдат идут к месту назначения.

3) Машина перевозит 4-х из 8-и солдат в направлении к месту назначения в течение 36 мин, остальные движутся пешком к месту назначения.

4) Расстояние между машиной и 4-мя солдатами составляет 24 – 4,8 = 19,2 км. Машина выезжает навстречу 4-м солдатам, скорость их сближения составляет 48 км/ч. Они встретятся через 19,2:48 = 0,4 (ч) или через 24 мин. Восемь перевезенных солдат идут к месту назначения.

5) Машина перевозит 4-х последних солдат к месту назначения в течение 36 мин, остальные движутся пешком к месту назначения и через те же 36 мин все окажутся у места назначения.

Всего для выполнения задания понадобилось 36 мин + 24 мин + 36 мин + 24 мин + 36 мин = 2 ч 36 мин. Это время минимально, так как все всё время двигались с наибольшей возможной скоростью и машина использовалась полностью, в направлении к месту назначения она всё время была полностью заполненной.

Ответ. 2 ч 36 мин.

Комментарий

Конечно, это хорошо строить свое решение на том, что вы уже знаете оптимальный план действий. Но как же поступить, если он вам не известен.

Решение 2:

Для начала надо понять, что наименьшее время получится, если машина будет использоваться полностью и все 12 солдат попадут в пункт назначения одновременно. Далее, поймем, что машина подбросила каждого из солдат на одинаковое расстояние. Это действительно так. Иначе солдаты прибудут в пункт назначения не одновременно, и время не будет минимальным. Также заметим, что для того, чтобы подвезти каждого солдата машина сделала 3 рейса в сторону пункта назначения (загруженная) и 2 рейса в обратную сторону (пустая). Теперь надо найти, на какое расстояние машина подбросила каждого из солдат. Возьмем искомое расстояние за x и составим уравнение.

(40-x)/8+x/40=3*x/40+2*(x-(x/40)*8)/(40+8)

В левой части уравнения – время, за которое один солдат добирается до пункта назначения. Время, которое он шел пешком равно (40-x)/8, а время, которое он ехал на машине равно x/40.

В правой части уравнения – время использования машины. Три рейса в сторону пункта назначения заняли 3*x/40 времени, а два рейса в обратную сторону заняли 2*(x-(x/40)*8)/(40+8) времени.

Левая часть уравнения должна быть равна правой части, так как мы считаем, что машина использовалась полностью.

Приведя все к общему знаменателю в обеих частях получаем:

(200-5x+x)/40=(18x+10x-2x)/240, отсюда получаем, что

1200-24x=26x,

x=24 (км).

Теперь остается только найти затраченное время, подставив x=24 в левую часть уравнения.

(40-24)/8+24/40=16/8+24/40=2+0,6=2,6. В часах это равняется 2 часа 36 минут.

Комментарий

Данная задача довольно сложная, хотя многие участники смогли найти правильный ответ. Конечно, не все они объяснили, почему полученное ими время будет наименьшим, но здесь за это они потеряли не так много баллов.

Не забывайте доказывать, что ваш ответ наименьший (или наибольший) когда этого требует задача.

Задача №9.

Некоторая компания собиралась 5 раз. Каждый раз присутствовали 4 человека из этой компании, причём никакие двое из её членов не были на встрече вместе более одного раза. Сколько человек может быть в такой компании, если каждый её член был хотя бы раз на сборе?

Решение:

Покажем, что обеспечить выполнение условий задания может только компания, в которой не менее 10 человек и не более 20. Если каждый член компании присутствовал на встрече только 1 раз, то в компании 20 человек. Если какой-то человек был на сборах хотя бы 3 раза, то на этих трех встречах с ним побывали еще 9 человек, так как никакие двое не встречались 2 раза. Осталось рассмотреть случай, когда ни один человек не был на встрече 3 раза и есть человек, который был 2 раза. Назовем a_1 – человека который был на двух встречах. Пусть на первой встрече были люди a_1, a_2, a_3 и a_4. Тогда на второй встрече a_1, a_5, a_6 и a_7. На каждой их оставшихся трех встреч могли присутствовать не более чем по одному человеку с каждой из этих встреч. Таким образом, если в компании будет менее 10 человек, то будут люди, которые встречались между собой более одного раза.

Пример для 10 человек:

a_1 a_2 a_3 a_4 – первая встреча.

a_1 a_5 a_6 a_7 – вторая встреча.

a_2 a_5 a_8 a_9 – третья встреча.

a_3 a_6 a_8 a_{10} – четвертая встреча.

a_4 a_7 a_9 a_{10} – пятая встреча.

Примеры для компаний из 11-19 человек строятся просто заменой на одной из встреч человека, который был еще на какой-либо встрече, на нового члена компании.

Ответ: в компании не менее 10 и не более 20 человек.

Комментарий

Задача довольно простая. Но многие участники конкурса, найдя минимальное количество людей в компании на этом остановились. В условии же сказано, что каждый был хоть раз на сборе. Это сделано для того чтобы была верхняя граница количества человек в компании. Ее тоже необходимо было найти. Будьте внимательней. Не бросайте решение на половине пути.

Задача №10.

Нужно разложить 45 яблок по k коробкам, расположенным по окружности, так, чтобы в любых двух соседних коробках число яблок отличалось друг от друга на 1 яблоко. Каким может быть число k, если в каждой коробке должно лежать хотя бы одно яблоко?

Решение

Если разложение 45 яблок по корзинам, удовлетворяющее условиям задания, возможно, то число k должно быть чётным, не делящимся на 4. Действительно, в каждой паре соседних коробок находится нечётное число яблок, число таких пар нечётно, так как 45 – число нечётное. Следовательно, число коробок чётно, но не делится на 4.

Число коробок не может быть больше 30, так как в каждой паре соседних коробок не менее трёх яблок и, следовательно, пар не больше, чем 45:3 = 15.

Осталось показать, что число коробок может равняться 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30. Это сделано в следующей таблице

K	Распределение яблок по коробкам
2	22, 23
6	7, 8, 7, 8, 7, 8
10	4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 4, 5
14	3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 2, 3, 2
18	3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2
22	3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2
26	3, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2
30	1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2

Ответ. 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30.

<u>Комментарий</u>

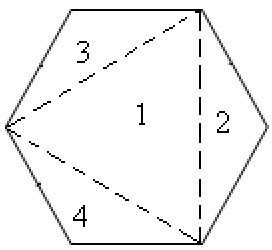
Задача решается простым перебором, но прежде чем выполнять перебор надо заметить один факт который этот перебор значительно сокращает. Хотя находились и те, кто перебрал все варианты, а не только четные не делящиеся на 4.

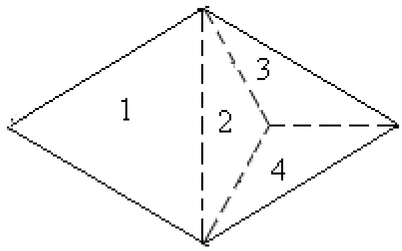
3 8-9 класс

Задача №6.

Можно ли разрезать правильный шестиугольник прямолинейными разрезами так, чтобы из полученных частей можно было сложить без наложений ромб?

Решение:





Решение см. на рисунке. Возможность складывания из треугольников 2, 3, 4 треугольника следует из того, что углы при вершинах правильного шестиугольника равны по 120°, а диагонали, соединяющие две вершины, между которыми находится ровно одна вершина, равны между собой.

Ответ. Можно.

Комментарий

Задача довольно простая. И практически все участники конкурса дали здесь правильный ответ. Некоторые даже привели различные объяснения, почему получившаяся фигура является ромбом. Многие нарисовали рисунок. Но, к сожалению, было огромное количество тех, кто посчитал достаточным просто написать слово «можно». Эти ученики получили всего по одному баллу. Олимпиада по математике это не лотерея где надо правильно ответить на вопрос «да» или «нет». Необходимо обосновывать свои ответы. Не забывайте, пожалуйста, это делать.

Задача №7.

Прямоугольный стол, размером 1м на 2м, заставлен одинаковыми круглыми тарелками, диаметр которых равен 20 см. Какой наибольший диаметр может иметь свеча, которую можно наверняка поставить на стол, не передвигая тарелок, если диаметры свечей выражаются целым числом сантиметров?

Решение:

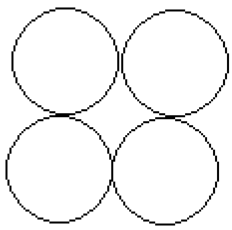


Рис. 1

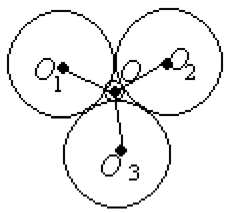


Рис. 2

Очевидно, что нужно рассматривать самый неблагоприятный случай, когда тарелки стоят вплотную. Задача сводится к нахождению наибольшего диаметра кружочка, который можно поместить между кругами одинакового диаметра, касающимися друг друга (см. рис. 1 и рис. 2). Очевидно, что в случае трёх кругов (рис. 2) рассматриваемая величина меньше, чем в случае четырёх (рис. 1), а тем более пяти, шести и более кругов.

Так как тарелки могли на середине стола касаться друг друга так, как показано на рис. 2, то больше, чем в этом случае, диаметр свечи быть не может.

Обозначим через O центр круга, который касается кругов с центрами O1, O2, O3, а через r – его радиус (рис. 2). Из условия касания маленького кружочка и больших кругов следует, что O – центр равностороннего треугольника O1O2O3 со стороной 20 см. Тогда OO1 = OO2 = OO3 = r + 10, а с другой стороны OO1 = $\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}O_2O_3=\frac{20}{\sqrt{3}}$.

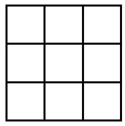
Следовательно, $r=\frac{20}{\sqrt{3}}-10$, а $2r=\frac{40}{\sqrt{3}}-20$. Отсюда 2r ≤ 3,1, то есть искомый диаметр равен 3 см.

Ответ. 3 см.

<u>Комментарий</u>

Очередная задача по геометрии не требующая особых знаний. У многих учеников она не вызвала никаких затруднений. Хотелось бы только еще раз повторить, что надо внимательнее читать условие. Так как далеко не все обратили внимание на то, что диаметр должен быть целым числом.

<u>Задача №8.</u>



Квадрат разбит четырьмя отрезками на 9 квадратиков, как это показано на рисунке. Сколько различных развёрток поверхности куба можно получить из этого квадрата, если можно делать разрезы только по сторонам квадратиков и склеивать два квадратика, перегибая их по сторонам?

Решение:

Исходя из условий разрезания, можно сделать вывод, что развёртка поверхности куба должна состоять из 6 квадратов, указанных на рисунке. Следовательно, для её получения нужно три пары квадратиков склеить. На рис. 1, 2, 3 и 4 показаны четыре способа получения развёртки поверхности куба. На них склеенные квадратики закрашены.

Других развёрток, не равных указанным, то есть таких, которые нельзя получить из указанных с помощью перемещений (параллельных переносов, поворотов, симметрий и др.) не существует.

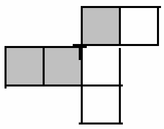


Рис. 1

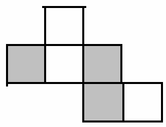


Рис. 2

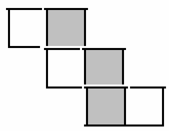


Рис. 3

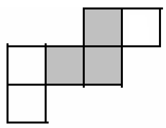


Рис. 4

Рассмотрим сначала получение развёрток, у которых центральная клетка на рис. 6 не перемещалась с помощью разрезания. Без ограничения общности, для удобства можно считать, что она является нижней гранью поверхности кубика на рис. 5. В этом случае, чтобы иметь верхнюю грань, нужно сделать разрез и склеивание такого вида, как это показано на рис. 7. Таких преобразований 8 (у каждой вершины 2). Все они – равные фигуры, Поэтому достаточно проанализировать варианты получения развёрток из фигуры на рис. 7.

Квадрат 4 обязательно является боковой гранью кубика. При этом есть всего четыре варианта выбора боковых граней, противоположных квадратам 2 и 4 (см. рис. 8 – 11).

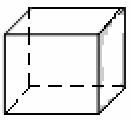


Рис. 5

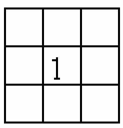


Рис. 6

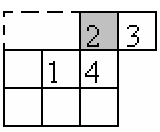


Рис. 7

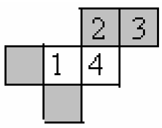


Рис. 8

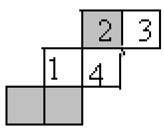


Рис. 9

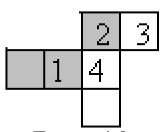


Рис. 10

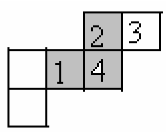


Рис. 11

Если же центральная клетка на рис. 6 вырезалась, то возможные варианты её склеивания с другими показаны на рис. 12 – 15.

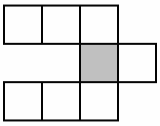


Рис. 12

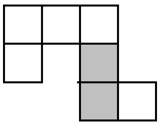


Рис. 13

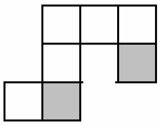


Рис. 14

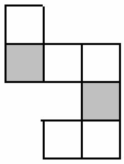


Рис. 15

Из указанных фигур склеиванием двух квадратиков получить развёртку поверхности куба нельзя.

Ответ. 4.

Комментарий

Хорошая задачка для рассуждения. Единственный ее минус состоит в том, что изложить подробное и строгое решение на бумаге не так-то просто. Наверное, именно поэтому многие решили этого не делать.

Задача №9.

К обменному пункту подошёл человек, подал 5 000 руб. и попросил дать ему целое число украинских гривен, целое число американских долларов и целое число евро, причём долларов в 10 раз меньше, чем гривен, а евро – минимально возможную сумму на остальные деньги. Сколько гривен, долларов, евро он получил, если за 4 руб. давали 1 грн., за 30 руб. – 1 доллар и за 40 руб. – 1 евро и все его деньги были использованы?

Решение:

Пусть клиент обменного пункта получил x долларов, за них с него взяли 30x руб. Из условия следует, что ему дали 10x грн., вычтя из поданной им суммы 40x руб. На оставшиеся деньги, то есть на 5 000 – 70x ему дали евро. Так как, по условию требуется, чтобы сумма в евро была наименьшей возможной, и, учитывая, что за 1 евро берут 40 руб., делаем вывод, что требуется найти такое значение x, чтобы при этом значении выражение 5 000 – 70x делилось на 40 и частное было наименьшим из всех возможных. Для этого нужно, чтобы x делилось на 4 и принимало из всех допустимых значений x наибольшее значение. Нетрудно видеть, что это значение x равно 68, то есть клиент получил 68 долларов, 680 гривен и $\frac{5000-70\cdot 68}{40}=6$ евро.

Ответ. 68 долларов, 680 гривен и 6 евро.

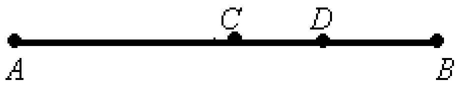
Комментарий

Многие участники конкурса без особого труда обнаружили, что количество долларов должно делиться на 4. А далее привели небольшой перебор, показавший, что искомое количество долларов равно 68.

Задача №10.

Два велосипедиста выехали из пунктов А и В навстречу друг другу и встретились в 5 км от А. Каждый из них, доехав до другого пункта, незамедлительно возвращался назад в пункт, из которого он выехал, и вторая их встреча произошла в 3 км от В. Каково расстояние между А и В?

Решение:



Обозначим через x и y скорости движения велосипедистов, выехавших, соответственно из А и В. Пусть первая встреча произошла в точке С, а вторая – в точке D (см. рис.). В следующей таблице представлены соотношения между расстояниями, скоростями, временами движения обоих велосипедистов на различных участках пути.

Участок движения	Путь, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Движение I на AC	5	x	$\frac{5}{x}$
Движение II на BC	$\frac{5y}{x}$	y	$\frac{5}{x}$
Движение I на CB	$\frac{5y}{x}$	x	$\frac{5y}{x^2}$
Движение II на CA	5	y	$\frac{5}{y}$
Движение I на BD	3	x	$\frac{3}{x}$
Движение II на AD	$\frac{5y}{x}+5-3=\frac{5y}{x}+2$	y	$\frac{1}{y}\left(\frac{5y}{x}+2\right)$

Учитывая, что между двумя встречами велосипедисты двигались одинаковое время, имеем уравнение: $\frac{5y}{x^2}+\frac{3}{x}=\frac{5}{y}+\frac{1}{y}\left(\frac{5y}{x}+2\right)$. После несложных преобразований получим: 5y2 – 7x2 – 2xy = 0 или 5t2 – 2t – 7 = 0, где $t=\frac{y}{x}$. Решая квадратное уравнение и учитывая, что $t > 0$, получим: $t=\frac{y}{x}=\frac{7}{5}$. Расстояние между А и В равно $\frac{5y}{x}$ + 5 (см. 2-ю строку таблицы). Поэтому АВ = 12 км.

Ответ. 12 км.

<u>Комментарий</u>

На самом деле, решение задачи намного сложнее, чем показано выше. Так как задача имеет несколько различных вариантов развития событий. Ведь в условии не сказано, что вторая встреча велосипедистов произошла тогда, когда они оба возвращались в тот пункт, из которого выехали изначально. Могло получиться и так, что велосипедист, выехавший из А не доехал до пункта В, к тому моменту, когда второй побывав в пункте А догнал первого на обратном пути. И так же есть вариант, при котором вторая встреча произошла раньше, чем второй доехал до пункта А. Оба эти варианта не противоречат условию. Решения в этих случаях строятся по тому же принципу, но имеют гораздо более некрасивые ответы, поэтому я не буду вам их приводить. В качестве упражнения можете попробовать сделать это самостоятельно.

Подробное решение хотя бы одного возможного случая оценивалось здесь в полный балл. Но нашлись и такие работы, в которых были рассмотрены несколько случаев, что не может ни радовать.

еФТШ