



# ЗОЛОТОЙ КЛЮЧИК

Всероссийский математический конкурс

## Разбор задач второй части заданий

### 1 4-5 класс

#### Задача №6.

Сколько шоколадных батончиков подарили Малышу на Новый год, если он, начиная с 1 января 2012 года, съедает каждый день по одному батончику и по воскресеньям угощал Карлсона двумя батончиками, а батончиков хватило только до конца года?

- А. 469      Б. 470      **В. 472**      Г. Ответ отличен от приведенных.

#### **Решение:**

Так 2012-й – год високосный, то в нём 366 дней. Кроме того, он начался в воскресенье. В нём 53 воскресенья. Следовательно, Малыш съел 366 батончиков, а Карлсон –  $53 \cdot 2 = 106$ . Вместе они съели  $366 + 106 = 472$  батончика. Так как к концу года батончики закончились, то Малышу подарили 472 батончика.

**Ответ. В. 472.**

#### Комментарий

Задача совсем простая. Но есть один подвох, который заключается в том, что 2012 год является високосным. Многие не заметили этот факт и в итоге потеряли баллы, получив неправильный ответ. Когда при решении требуется посчитать количество воскресений в 2012-ом году, тут на помощь приходит календарь. Можно, как говорится, в лоб пересчитать все воскресенья, а можно вычислить их количество исходя из того, что год начинается с воскресенья и содержит в себе 52 недели и еще 2 дня. В общем, тут уже выбор за вами. Но если в задании требуется привести подробное решение, то советую описывать свои методы нахождения подобных значений.

#### Задача №7.

В роще на каждом дереве сидит не менее 4 ласточек. Всего 213 ласточек. Какому числу из приведенных может равняться число деревьев в роще?

- А. 53      Б. 54      В. 55      Г. 56

#### **Решение 1:**

Предположим, что на каждом дереве сидело ровно по 4 ласточки. Так при делении числа 213 на 4 получается в неполном частном 53 и в остатке 1, то число деревьев менее 54. Оно может равняться 53: на 52 деревьях по 4 ласточки и на одном – 5. Действительно, тогда число ласточек равно  $52 \cdot 4 + 5 = 213$ .

**Ответ. А. 53.**

#### **Решение 2:**

Если вы достаточно внимательны, то вы сможете заметить тот факт, что если какой-либо ответ  $N$  удовлетворяет условию, то и ответ  $N-1$  также будет удовлетворять условию (если конечно  $N$  не равно 1). Действительно, ничего не испортится, если все ласточки с какого-либо дерева пересядут на другое дерево, на котором уже есть ласточки. Поэтому если предположить, что ответ Б, В либо Г

верный, то и все ответы до него тоже будут верные. После таких соображений остается только проверить что ответ Б не является верным.

**Ответ. А. 53.**

### Комментарий

Но учтите, что второе решение подходит только в конкретном случае, когда имеются варианты ответа и правильный среди них только один. Конечно, когда надо привести подробное решение, лучше, если оно будет такое как первое. Но если вы все же заметили подобную «хитрость», то это только плюс вашей находчивости.

### Задача №8.

Двенадцать школьников, среди которых четыре пятиклассника и восемь старшекласников, собрались в однодневный поход. На его проведение требовалось 924 руб. Договорились, что взнос каждого из пятиклассников будет на четверть меньше взноса каждого из остальных школьников. На сколько рублей взнос пятиклассника меньше взноса старшекласника?

А. 7 руб      Б. **21 руб**      В. 63 руб      Г. 77 руб

#### **Решение 1:**

Вместе четыре пятиклассника внесут такой же взнос, как три старшекласника, то есть 924 руб. составляют суммарный взнос 11 старшекласников. Взнос каждого из старшекласников составляет  $924:11 = 84$  рубля. Взнос пятиклассника меньше его на  $84:4 = 21$  (руб.).

**Ответ. Б. 21 руб.**

#### **Решение 2:**

Если вы уже умеете составлять уравнения, то можно сделать и так:

Пусть  $x$  – взнос старшекласника, тогда  $8*x+4*x*3/4=924$ . Получаем  $11x=924$ , отсюда  $x=84$ . Так как взнос пятиклассника на четверть меньше, то ответ  $84/4=21$ .

**Ответ. Б. 21 руб.**

### Комментарий

Также при составлении уравнения вы можете взять неизвестным параметром взнос пятиклассника или даже разницу между взносами старшекласника и пятиклассника. У вас получатся уравнения  $8*x*4/3+4*x=924$  или  $8*x*4+4*x*3=924$  соответственно. При  $x$  – разница взносов, уравнение даже получается легче.

При составлении уравнений старайтесь выбирать неизвестные параметры такие, чтобы уравнение получалось проще. И по возможности, чтобы после нахождения неизвестных приходилось делать меньше дополнительных вычислений. Так вы оставляете себе меньше шансов допустить ошибку при вычислениях.

### Задача №9.

Пять участников олимпиады стали её победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно первое, второе и третье места. Сколько участников завоевали первое место, сколько второе и сколько третье, если вместе они набрали 69 баллов?

**А. Первое место – 1 участник, второе и третье по 2 участника.**

- Б. Первое место – 2 участника, второе – 1 и третье – 2 участника.  
В. Первое и второе место по 2 участника, третье место – 1 участник.  
Г. Определить нельзя.

**Решение:**

Из условия вытекает, что только 1 из 5 призёров мог набрать 15 баллов. Действительно, если бы таких призёров было 2, то на долю трёх остальных осталось бы  $69 - 15 \cdot 2 = 39$  баллов, которые нельзя распределить между тремя участниками так, чтобы набраны были и 13 и 14 баллов. Точно также проверяется, что три призёра не могли набрать по 15 баллов. Итак, первое место мог занять только один участник. На долю 4-х остальных приходится  $69 - 15 = 54$  балла. Замечая, что  $54 = 27 \cdot 2$ , а  $27 = 14 + 13$ , можно сделать вывод, что два призёра набрали по 14 баллов, а двое – по 13. Других вариантов представлений числа 54 в виде суммы четырёх слагаемых, равных или 13, или 14, не существует.

**Ответ. А. 1, 2 и 2.**

**Комментарий**

С этой справились все. Она оказалась, наверное, самой простой. Ее можно решить простейшим перебором трех вариантов предложенных в вариантах ответа.

**Задача №10.**

Антону подарили диск, на котором записаны его любимые мультфильмы. Длительность просмотра каждого из записанных мультфильмов не превышает 30 мин., а на просмотр всех потребуется 5 часов. За какое наименьшее число дней Антон гарантированно сможет просмотреть все мультфильмы по одному разу, если ему в день можно смотреть телевизор не более полутора часов и каждый мультфильм можно смотреть только в течение одного дня?

- А. 3 дня.                      Б. 4 дня.                      **В. 5 дней.**                      Г. 6 дней.

**Решение:**

Покажем, что Антон сможет в день смотреть мультфильмы более одного часа, но менее полутора часов. Если время, потраченное им на просмотр мультфильмов, не более часа, то он сможет, не нарушая порядка, посмотреть ещё один мультфильм, так как длительность его просмотра не превышает, по условию, 30 мин. И так до тех пор, пока время просмотра не превысит 1 час. Так как на просмотр всех мультфильмов требуется, по условию, 5 часов, то за 5 дней Антон сможет посмотреть все мультфильмы по одному разу.

Покажем, что 4-х дней может оказаться недостаточно для просмотра всех мультфильмов на диске. Например, если на диске записаны 12 мультфильмов длительностью 23 мин. каждый и один мультфильм длительностью 24 мин., то на их просмотр потребуется  $23 \cdot 12 + 24 = 300$  минут или 5 часов. Но в день из этих мультфильмов можно посмотреть не более трёх: на просмотр 4-х требуется  $23 \cdot 4 = 92$  мин., что превышает полтора часа.

**Ответ. В. 5 дней.**

**Комментарий**

В этой задаче было допущено больше всего ошибок. Большинство участников ответили «Б. 4 дня». Естественно это неверный ответ, так как в решении приведен

---

пример, когда 4 дня для просмотра всех мультфильмов будет недостаточно. В условии спрашивается «за какое наименьшее число дней Антон гарантированно сможет просмотреть все мультфильмы», ну нет никаких гарантий, что длительность мультфильмов не будет такой как в примере, приведенном в решении.

## 2 6-7 класс

### Задача №6.

Бригада из двенадцати человек получила 390 тыс. руб. за выполненную работу. У четверых ставки выше, чем у остальных, на 10%, 15%, 25% и 50% соответственно. Какова наибольшая разница в суммах, полученных членами бригады?

А. 10 тыс. руб      Б. 15 тыс. руб      В. 25 тыс. руб      Г. 50 тыс. руб

#### **Решение:**

Обозначим через  $a$  (тыс. руб.) сумму, полученную каждым из 8 членов бригады, имеющих одинаковую оплату. Тогда оплата четырёх остальных членов бригады составляет, соответственно,  $1,1a$ ,  $1,15a$ ,  $1,25a$ ,  $1,5a$ . Зарплата всех членов бригады составляет  $8a + 1,1a + 1,15a + 1,25a + 1,5a = 13a$ , что по условию равно 390 тыс. руб. Отсюда вытекает, что  $a = 30\ 000$  руб. Наибольшая разница в полученных суммах между  $1,5a$  и  $a$ . Она составляет  $0,5a$  или 15 тыс. руб.

**Ответ. Б. 15 тыс. руб.**

#### Комментарий

С этим заданием справились практически все. Задача на составление линейного уравнения с одним неизвестным. Даже коэффициенты подобраны так, чтобы все вычисления были достаточно просты. Задачу также можно решать исходя из предложенных ответов, но такое решение будет более сложное и громоздкое чем предложенное выше. Поэтому не считаю целесообразным его предоставлять. Можете в качестве упражнения попробовать подставлять предложенные ответы, считать ставки каждого работника и проверить будет ли сумма полученных ставок удовлетворять условию.

### Задача №7.

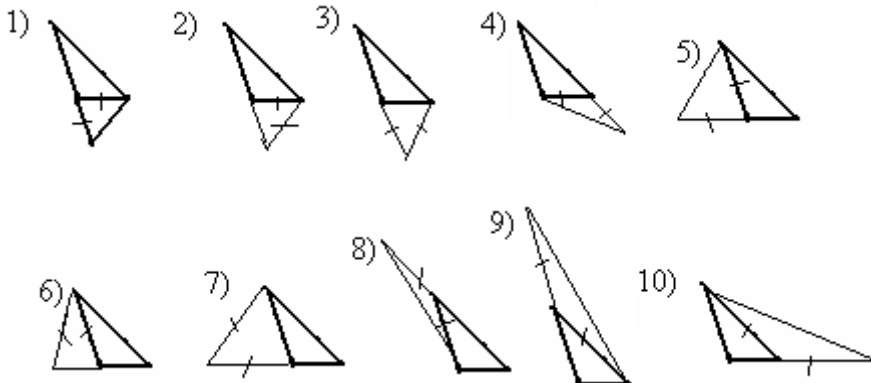
Сколькими способами к треугольнику, изображённому на рисунке, можно приложить равнобедренный треугольник, чтобы получился новый треугольник?



А. 6      Б. 8      В. 10      Г. Ответ отличен от приведенных

#### **Решение:**

На рисунках указаны все возможные способы образования треугольника прикладыванием к нему равнобедренного треугольника.



Анализ рисунков показывает, что если углы, прилегающие к стороне, острые, то можно построить только два треугольника, прилегающие к этой стороне, а если один из углов тупой, то – 4.

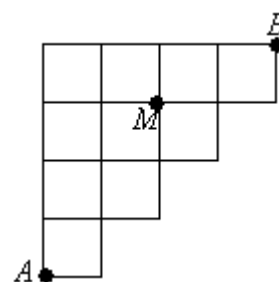
**Ответ. В. 10.**

### Комментарий

Я не стану описывать подробный анализ рисунков упомянутых в решении. Если описать его на бумаге он получится довольно объемным и сложно воспринимаемым, хотя особых познаний он все же не требует. Именно по этой причине задача была предложена в тестовой части конкурса и не требовала подробного решения. Поскольку большинство участников все же справились с данной задачей, можно сказать, что она оказалась вполне доступной.

### Задача №8.

На перекрёстке А по дороге в школу Вася упал и порвал брюки. Теперь ему надо кратчайшим путём попасть домой, его дом находится на перекрёстке В, не попав при этом на перекрёсток М, где работает мама (см. рис.). Он может двигаться только по улицам, изображённым на рисунке вертикальными и горизонтальными линиями. Сколько существует маршрутов движения Васи?



А. 10            Б. 14            В. 15            Г. 20

### **Решение:**

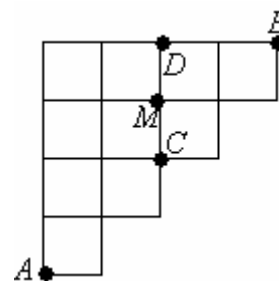
В точку С (см. рис. справа) Вася кратчайшим путём может попасть из точки А пятью способами, и в точку D (минуя точку М) – пятью.

Из точки С в точку В он может попасть двумя способами. Следовательно, из точки А в точку В через точку С Вася кратчайшим путём может попасть десятью способами.

Так как из точки D в точку В по кратчайшему пути Вася может попасть только одним способом, то всего из точки А в точку В через точку D он может попасть пятью способами.

Всего существует 15 искомым маршрутов движения Васи.

**Ответ. В. 15.**



### Комментарий

Существуют различные подходы к тому, как почитать все варианты. Но, так или иначе, это будет простой перебор. И главное не упустить какие-то варианты или не посчитать какие-то по несколько раз. Будьте предельно внимательны при решении задач перебором. Уделяйте этому больше времени. Проверяйте полученные ответы.

### Задача №9.

Имеется прямоугольная пластинка массой в 10 г. Сколькими способами её можно разрезать на три части с целым числом граммов каждая, чтобы с их помощью можно было взвесить на чашечных весах предметы массой 1 г, 2 г, 3 г, ..., 10 г?

А. Ни одного

Б. Один

**В. Два**

Г. Три

**Решение:**

Пластинку массой 10 г можно разрезать на 3 части с целым числом граммов каждая следующими восемью способами:  $10 = 1 + 1 + 8$ ,  $10 = 1 + 2 + 7$ ,  $10 = 1 + 3 + 6$ ,  $10 = 1 + 4 + 5$ ,  $10 = 2 + 2 + 6$ ,  $10 = 2 + 3 + 5$ ,  $10 = 2 + 4 + 4$ ,  $10 = 3 + 3 + 4$ . Части массой 1 г, 3 г, 6 г позволяют взвесить любой предмет масса которого выражается целым числом от 1 г до 10 г. Действительно,  $2 = 3 - 1$ ,  $4 = 1 + 3$ ,  $5 = 6 - 1$ ,  $7 = 6 + 1$ ,  $8 = 6 + 3 - 1$ ,  $9 = 6 + 3$ . То же самое относится и к частям массой 1 г, 2 г, 7 г:  $3 = 1 + 2$ ,  $4 = 7 - 1 - 2$ ,  $5 = 7 - 2$ ,  $6 = 7 - 1$ ,  $8 = 7 + 1$ ,  $9 = 7 + 2$ .

Что касается остальных способов разрезания, то они не удовлетворяют условию задания. Части 1 г, 1 г, 8 г не позволяют взвесить предмет, например, массой 3 г; части 1 г, 4 г, 5 г – предмет массой 7 г; части 2 г, 2 г, 6 г – предмет массой 1 г; части 2 г, 3 г, 5 г – предмет массой 9 г; части 2 г, 4 г, 4 г – предмет массой 1 г; части 3 г, 3 г, 4 г – предмет массой 5 г. Итак, число искомых способов равно 2.

**Ответ. В. Два.****Комментарий**

Данная задача, как и предыдущая, решается полным перебором. Хотя здесь довольно много участников посчитали, что такой способ всего один. Думаю, они не с той стороны подошли к решению задачи, попытавшись, такой способ построить, не проверив остальные варианты.

При решении задач перебором постарайтесь заметить какие-либо факты позволяющие отсеять сразу несколько вариантов. Это поможет вам сократить перебор, тем самым оставив меньше шансов на ошибку. В данной задаче перебор не такой уж громоздкий, всего 8 вариантов. Но даже здесь заметив, что все 3 части не могут иметь четный вес, вы сразу сокращаете перебор на несколько вариантов.

**Задача №10.**

На гранях кубиков требуется написать все буквы русского алфавита. Какое наименьшее число кубиков надо взять, чтобы все буквы были написаны одинаковое число раз?

А. 33

Б. 20

**В. 11**

Г. 10

**Решение:**

На кубике 6 граней. Поэтому число букв, написанных на гранях кубика, кратно 6. С другой стороны, это число кратно 33. Следовательно, оно кратно 66. Наименьшее число букв, которые можно написать на гранях кубиков, чтобы все буквы были написаны одинаковое число раз, равно 66. Для этого надо взять 11 кубиков.

**Ответ. В. 11.****Комментарий**

Как вы уже могли заметить, многие тестовые задачи можно решить, просто проверив предложенные ответы и выбрав среди них правильный. И эта задача не исключение. Если взять 10 или 20 кубиков, то количество букв написанных на них



---

будет равно 60 и 120 соответственно. Но так как в алфавите 33 буквы, то каждая буква не может быть написана одинаковое количество раз. Далее нетрудно проверить, что ответ 11 удовлетворяет условию, после чего 33 можно даже не проверять.

Решая задачи подобным способом, обратите внимание на вопрос задачи. Если необходимо найти наименьшее или наибольшее, то начинайте проверку предложенных вариантов с наименьшего или наибольшего из них соответственно.

### 3 8-9 класс

#### Задача №6.

На картонную трубку намотали плотно 25 м бумаги толщиной в 0,1 мм. Получился валик с диаметром поперечного сечения 1 дм. Чему приближённо равен диаметр картонной трубки? Выберите наиболее точный из приведенных результатов.

А 90 мм

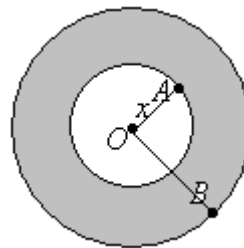
Б. 87 мм

В. 85 мм

Г. 82 мм

#### **Решение:**

Поперечное сечение валика изображено на рисунке. По условию,  $OB = 5$  см. Можно предположить, что площадь кольца, образованного двумя concentricкими окружностями, радиусы которых  $OB$  и  $OA$ , равна площади прямоугольника со сторонами 2500 см и 0,01 см. Эта площадь равна 25 см<sup>2</sup>. Площадь указанного кольца  $S$  равна  $S = \pi OB^2 - \pi OA^2 = \pi(25 - x^2)$ . Следовательно,  $\pi(25 - x^2) = 25$  или



$$x = \sqrt{25 - \frac{25}{\pi}} = 5 \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}} \approx 4,1$$

см. Тогда диаметр трубки примерно равен 82 мм.

**Ответ. Г. 82 мм.**

#### Комментарий

Предложенная задача по геометрии вызвала некоторые затруднения у участников. Сложно судить, где именно были допущены ошибки, ведь условия конкурса не требовали подробного решения тестовых заданий. Похоже, они использовали неверные пути решения либо просто дали ответ наугад. Как видно, приведенное выше решение не требует особых знаний и навыков. Надо только было догадаться считать все через площади. Хотя как иначе?

#### Задача №7.

Открытки с новогодними поздравлениями послали  $n$  друзей друг другу. Чему равно  $n$ , если всего было послано 342 открытки?

А 16

Б. 17

В. 18

Г. 19

#### **Решение:**

Каждый из  $n$  друзей послал  $(n - 1)$  открытку. Всего было послано  $n(n - 1)$  открыток. По условию,  $n(n - 1) = 342$  или  $n^2 - n - 342 = 0$ . Решая это квадратное уравнение и учитывая, что  $n$  - целое положительное число, получим:  $n = 19$ .

**Ответ. Г. 19.**

#### Комментарий

Когда от вас не требуется оформление подробного решения задачи, подобные задания можно выполнять простым перебором предложенных вариантов ответа. Это довольно просто и метод рабочий. Предположив, что количество друзей равно 16, получим, что они отправили  $16 \cdot 15 = 240$  открыток и т.д. проверив все варианты

ответа найдем среди них единственный правильный. Не исключена возможность того, что многие участники так и поступили.

### Задача №8.

В соревнованиях по бегу на лыжах, прыжкам с трамплина и лыжному двоеборью (бег и прыжки) приняли участие более 60 спортсменов. При этом с трамплина прыгнули 45 человек, а дистанцию пробежали 40 человек. Число участников двоеборья может равняться ...

А 24

Б. 25

В. 30

Г. 35

#### **Решение:**

Обозначим через  $x$  число участников двоеборья, а через  $a$  – общее число участников соревнований. Если к 40 участникам бега прибавить 45 прыгунов, то получится 85 участников, но при этом двоеборцы учтены дважды. Таким образом,  $a = 40 + 45 - x$ . так как  $a > 60$ , то  $x < 25$ . Следовательно, ответы Б, В, Г неверны. В двоеборье может участвовать 24 человека, если с трамплина прыгнули 45 человек, из них и дистанцию прошли 24 человека, а остальные  $40 - 24 = 16$  бегунов с трамплина не прыгали.

**Ответ. А. 24.**

### Комментарий

Давайте немного по рассуждаем. Для начала заметим, что верхнего предела числа участников в задаче не дано. Единственное ограничение это, что их более 60 человек. Пусть какое-то количество участников двоеборья  $X$  удовлетворяет условию и при таком  $X$  число спортсменов должно равняться  $Y$ . Если взять Количество участников двоеборья меньше чем  $X$ , то общее количество спортсменов только увеличиться. А значит, никаких противоречий с условием не будет. Зная, что среди предложенных вариантов ответа только один удовлетворяет условию, делаем вывод, что правильным должен быть наименьший из предложенных вариантов ответа.

### Задача №9.

На кольцевой дороге проводится эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете, если длина кольцевой дороги 330 км, а длина каждого этапа – 75 км?

А. 11.

Б. 22.

В. 24.

Г. 55.

#### **Решение:**

Так как старт и финиш эстафеты находятся в одном и том же месте, то расстояние, пройденное участниками эстафеты кратно 330 км. Кроме того, оно кратно длине каждого этапа – 75 км. Наименьшее общее кратное чисел  $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$  и  $75 = 3 \cdot 5^2$  равно  $330 \cdot 5 = 1650$ . Следовательно, 1650 км – это наименьшее расстояние, которое могут проехать участники эстафеты. На этом расстоянии они пройдут  $1650:75 = 22$  этапа.

**Ответ. Б. 22.**

### Комментарий

Простейшая задача на умение найти НОК двух чисел. Практически все участники сумели сделать это правильно. Тем более, имея варианты ответа и калькулятор, достаточно нескольких секунд, чтобы проверить какое из произведений  $11 \cdot 75$ ,  $22 \cdot 75$ ,  $24 \cdot 75$  или  $55 \cdot 75$  делится на 330.

### Задача №10.

В супермаркете требуется, чтобы каждый день на работу выходило не менее 20 продавцов-консультантов. Каждый сотрудник должен иметь не менее двух выходных в неделю. Какое наименьшее число продавцов-консультантов должно быть принято на работу, чтобы обеспечить выполнение указанных условий?

А. 26.

Б. 27.

**В. 28.**

Г. 30.

### **Решение**

Обозначим через  $p$  число продавцов-консультантов, находящихся в штате супермаркета. В неделю требуется  $20 \cdot 7$  рабочих человеко-выходов. У каждого работника не более пяти рабочих дней в неделю, а у  $p$  работников – не более  $5p$ . Требуется, чтобы  $5p \geq 140$  или  $p \geq 28$ . Покажем, что 28 человек могут обеспечить выполнение указанных условий. Пусть восемь человек имеют выходные в понедельник и вторник, ещё восемь – в среду и четверг. Дни отдыха остальных 12 человек устанавливаются следующим образом: первая четвёрка из них отдыхает в пятницу и субботу, вторая четвёрка – в субботу и в воскресенье, третья – в пятницу и в воскресенье.

**Ответ. В. 28.**

### Комментарий

Как видно из решения, понять, что менее 28 человек быть не может не сложно. Единственная сложность в данной задаче состоит в том, чтобы построить модель рабочего графика, при котором 28 продавцов-консультантов смогут обеспечить все необходимые условия. Многие не сумели дать правильный ответ, хотя привести решение задачи от участников конкурса здесь не требовалось.



<http://eftsh.ru>

© eFTШ