Золотой ключик

Всероссийский математический конкурс

Разбор задач первой части заданий

1 4-5 класс

Задача №1.

В копилку бросали только 5-рублёвые монеты. В первый день бросили несколько монет, а во второй – ещё 2, но число монет в копилке было меньше 8. В третий день бросили ещё 2 монеты, и тогда в копилке стало больше 8 монет. Какая сумма денег была брошена в копилку в первый день?

А. 35 руб Б. 30 руб **В. 25 руб** Г. 20 руб

Решение:

По условию, число монет, брошенных в копилку в первый день, увеличенное на 2, меньше 8, а увеличенное на 4, - больше 8. Следовательно, в первый день в копилку бросили меньше 6 монет, но больше 4-х, то есть 5 монет. Итак, в первый день в копилку было брошено 25 руб.

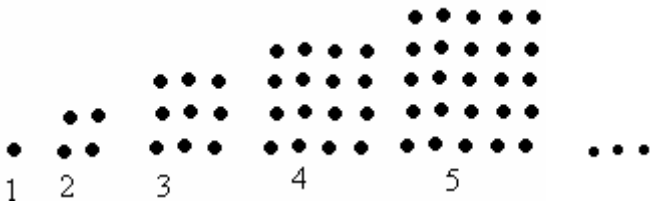
Ответ. В. 25 руб.

Комментарий

Задача довольно простая. С ней справились практически все. Неправильный ответ здесь дали в основном те, кто давал ответы наугад. Не считаю целесообразным пытаться угадывать ответы в столь простых задачах как эта. Другое дело если решить задачу не получается, тогда можно и погадать. Но уж настолько простые задачи надо уметь решать.

Задача №2.

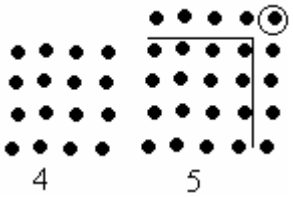
Каждый последующий набор кружочков строится из предыдущего, как это показано на рисунке. Сколько кружочков нужно добавить к 100-му набору, чтобы получить 101-й?



А. 100 Б. 101 В. 200 **Г. 201**

Решение 1:

Анализируя построение 5-го набора из 4-го, 4-го из 3-го и т. д., можно сделать вывод, что на каждом шагу добавляется число кружочков, равное сумме числа рядов предыдущего набора и числа его столбцов, увеличенной на 1 (см. рис.). Следовательно, 101-й набор можно получить, добавив к 100-му 100 + 100 + 1 = 201 кружочек.



Ответ. Г. 201.

Решение 2:

Количество кружочков в наборе под номером n равно n*n, а количество кружочков в наборе под номером n+1 равно (n+1)*(n+1)=n*n+2*n+1, что на 2n+1 больше чем в предыдущем наборе. Если нам надо сравнить наборы 100-й и 101-й, то

n=100 и чтобы получить 101-ый набор потребуется добавить к 100-му 2*100+1 кружочек.
Ответ. Г. 201.

Комментарий

Эта тоже простая задача, и правильный ответ на нее дали практически все. Но были и те, кто допустил здесь ошибку. Думаю это связано с тем, что многие попросту не проверяют свои ответы. Я, конечно, не говорю, что надо нарисовать 100-й и получить из него 101-й набор, посчитав, сколько кружочков вы для этого добавили. Но вы же даете ответ исходя из некоторых соображений (по крайней мере, я на это надеюсь). Проверьте свои соображения на более мелких наборах, чем 100-й.

Задача №3.

В январе было 12 безветренных дней без снега, 14 дней был ветер, 11 дней шёл снег. Сколько дней в этом месяце была метель – снег с ветром?

А. 6 дней Б. 7 дней В. 19 дней Г. 25 дней

Решение:

Так как в январе 31 день, а 12 дней было безветренно и не шёл снег, то в каждый из оставшихся 19 дней или был ветер, или шёл снег, или была метель, то есть шёл снег и было ветрено. Ветер был 14 дней, снег шёл 11 дней. Если сложить 14 и 11, получим 25. При этом дни, когда была метель, учтены дважды. Следовательно, метель была 14 + 11 – 19 = 6 (дней).
Ответ. А. 6 дней.

Комментарий

Было несколько человек, которые сочли правильным ответом в этой задаче «7 дней». Похоже, они попросту посчитали, что в январе 30 дней. В задачах часто используются общеизвестные факты, такие как количество дней в високосном или невисокосном году, количество полных недель в году или как в нашем случае количество дней в месяце. Если вдруг вы не уверены в том, что обладаете достоверной информацией относящейся и подобным вещам, то лучше уточните ее из доступных источников (в данном случае в календаре).

Задача №4.

Три покупателя А, Б, В купили в магазине товары нескольких наименований. Каждого наименования товаров было куплено по 4 единицы. Больше всех единиц товаров купил покупатель А – 11, меньше всех – покупатель В, 7. Сколько наименований товаров было куплено?

А. 10 Б. 9 В. 8 **Г. 7**

Решение:

Из условия следует, что покупатель Б купил или 8, или 9, или 10 единиц товаров. Так как каждого наименования было куплено по 4 единицы, то число всех купленных товаров должно делиться на 4. Из трёх указанных чисел только число 10 в сумме с числами 11 и 7 даёт число, делящееся на 4: 10 + 11 + 7 = 28. Частное от

деления числа купленных единиц товаров на 4 равно числу купленных наименований товаров. Оно равно 7.
Ответ. Г. 7.

Комментарий

С этой задачей тоже практически все справились. Если разобраться немного, то задача сводится к нахождению числа между 7+7+11=25 и 11+7+11=29, которое делится на 4 без остатка. Поле нахождения такого числа, разделить его на 4 и получить ответ не составляет труда.

Очень важно правильно понимать условие и вопрос задачи. Многие задачи в текстовом виде воспринимаются не очень хорошо. Недаром в школе учат при оформлении решений писать к задаче «дано» и «найти». Не избегайте этого. Это очень сильно помогает восприятию условия.

Задача №5.

В пакет помещается только 9 яблок. Чтобы выложить из корзины яблоки, необходимо три пакета, но когда в корзину добавили ещё 15 яблок, то потребовалось ещё два пакета. Какое наименьшее число яблок могло быть в корзине первоначально?

А. 21 **Б. 22** В. 23 Г. 24

Решение:

Так как в пакет помещается только 9 яблок и при добавлении в корзину 15 яблок для перекладывания яблок из корзины потребовалось 5 пакетов, то яблок стало больше 36. Но тогда первоначально в корзине было более 21 яблока. Наименьшее число, удовлетворяющее этому условию, равно 22. Оно удовлетворяет условию задачи.
Ответ. Б. 22.

Очень часто участники конкурсов путают (либо не понимают) разницы между утверждениями «А больше чем В» и «А не меньше чем В». Возможно, именно по этой причине некоторые посчитали, что правильный ответ А. 21. Разница между этими утверждениями в том, что второе включает тот случай когда А=В, в то время как при первом утверждение это невозможно.

2 6-7 класс

Задача №1.

В студенческой группе 16 юношей и несколько девушек. Каждый из них либо получает стипендию, либо работает в свободное время, не получая стипендии. Работает столько девушек, сколько юношей получает стипендию. Сколько студентов группы работает в свободное время?

А. 8. Б. 12. **В. 16.** Г. Определить нельзя.

Решение 1:

Так как в группе каждый либо получает стипендию, либо работает и стипендии не получает, то коллектив юношей состоит из двух групп – группы работающих и группы получающих стипендию. Но количество юношей второй группы равно количеству работающих девушек в студенческой группе. Следовательно, число работающих в группе равно числу юношей, то есть 16 (см. рис.).

Ответ. В. 16.

Решение 2:

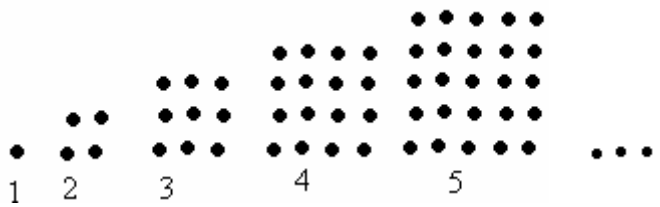
Проще говоря, пусть X юношей получают стипендию. Тогда количество работающих в свободное время студентов будет равно 16-X(работающие юноши)+X(работающие девушки)=16.

Комментарий

На первый взгляд может показаться, что в задаче недостаточно данных для ее решения. Но если внимательно прочитать условие, то становится понятно, что тут и решать то нечего. Недаром с этой задачей справилось подавляющее большинство участников.

Задача №2.

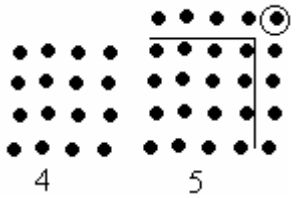
Каждый последующий набор кружочков строится из предыдущего, как это показано на рисунке. Сколько кружочков нужно добавить к 100-му набору, чтобы получить 101-й?



А. 100 Б. 101 В. 200 **Г. 201**

Решение 1:

Анализируя построение 5-го набора из 4-го, 4-го из 3-го и т. д., можно сделать вывод, что на каждом шагу добавляется число кружочков, равное сумме числа рядов предыдущего набора и числа его столбцов, увеличенной на 1 (см. рис.). Следовательно, 101-й набор можно получить, добавив к 100-му 100 + 100 + 1 = 201 кружочек.



Ответ. Г. 201.

Решение 2:

Количество кружочков в наборе под номером n равно n*n, а количество кружочков в наборе под номером n+1 равно (n+1)*(n+1)=n*n+2*n+1, что на 2n+1 больше чем в предыдущем наборе. Если нам надо сравнить наборы 100-й и 101-й, то n=100 и чтобы получить 101-ый набор потребуется добавить к 100-му 2*100+1 кружочек.

Ответ. Г. 201.

Комментарий

Эта тоже простая задача, и правильный ответ на нее дали практически все. Но были и те, кто допустил здесь ошибку. Думаю это связано с тем, что многие попросту не проверяют свои ответы. Я, конечно, не говорю, что надо нарисовать 100-й и получить из него 101-й набор, посчитав, сколько кружочков вы для этого добавили. Но вы же даете ответ исходя из некоторых соображений (по крайней мере, я на это надеюсь). Проверьте свои соображения на более мелких наборах, чем 100-й.

Задача №3.

На уроке физкультуры учащиеся сдавали нормы по прыжкам в длину и прыжкам в высоту. После урока учитель составил четыре списка: 1) сдавших нормы по прыжкам в длину; 2) сдавших нормы только по одному виду прыжков; 3) сдавших нормы хотя бы по одному виду прыжков; 4) сдавших нормы по обоим видам прыжков. Какой из списков не короче остальных?

А. Первый Б. Второй **В. Третий** Г. Четвёртый

Решение 1:

Обозначим через a, b, c соответственно число учащихся, сдавших нормы по прыжкам в длину, нормы по прыжкам в высоту, нормы по обоим видам прыжков. В следующей таблице приведены выражения для количеств учащихся в указанных списках учителя.

№ списка	1	2	3	4
Число уч-ся в списке	a	a + b – 2c	a + b – c	c

Так как $a \geq c$, $b \geq c$, то $a + b - c \geq a$, $a + b - c \geq c$ и $a + b - c \geq a + b - 2c$, то есть третий список не короче 1-го, не короче 4-го и не короче 2-го. Если же $c \neq 0$, то 3-й список и длиннее остальных.

Ответ. В. Третий.

Решение 2:

Данную задачу можно решать и на конкретном примере, взяв вместо a,b и c числа. Надо только учесть, что количество участников сдавших нормы по обоим видам прыжков не может быть больше, чем количества участников сдавших нормы по каждому из видов прыжков. Предположим, что нормы по прыжкам в высоту сдали 2 участника. Нормы по прыжкам в длину тоже сдали 2 участника. И лишь 1 участник сдал нормы по обоим видам прыжков. Тогда длины первого, второго, третьего и четвертого списков равны соответственно 2, 2, 3 и 1. Как видим третий список не короче остальных. Таким образом получается, что ответы А, Б и Г не верны, так как мы построили пример в котором это так. Рассуждать на тему того,

что ответ В всегда будет верным уже не имеет смысла, так как правильный ответ среди четырех предложенных точно есть. Смело отвечаем В.Третий.

Комментарий

Конечно, второй способ решения задачи подходит здесь только потому, что предложены именно такие варианты ответов. Если бы среди предложенных вариантов был ответ Д.Никакой или же варианты бы небыли предложены. Стоило бы еще доказать, что ответ В верный во всех случаях. Решение задачи на частном примере в таком случае не имеет смысла.

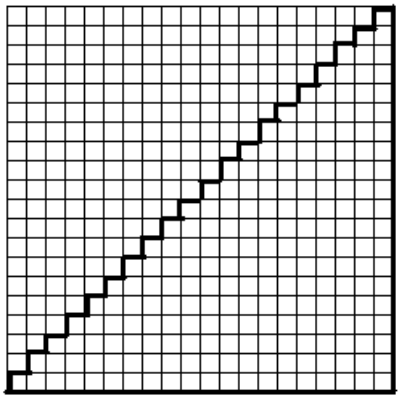
Задача №4.

На клетчатой бумаге изобразили многоугольник, то есть часть плоскости, ограниченной замкнутой ломаной линией без самопересечения. Все стороны его лежат на линиях сетки. Сумма количеств вершин и сторон этого многоугольника может равняться …

А. 94. **Б. 84.** В. 74. Г. 42.

Решение:

У многоугольника, все стороны которого лежат на линиях сетки, чётное число вершин, так как его вершины являются концами всех вертикальных сторон, а у вертикальных сторон по два конца. Число сторон многоугольника равно числу его вершин. Поэтому сумма количеств вершин и сторон многоугольника делится на 4. Из приведенных чисел на 4 делится только 84. Построение многоугольника указанного вида с числом вершин 42 показано на рисунке.



Ответ. Б. 84.

Комментарий

С этим задание справились практически все. Даже если и кто-то не заметил, что ответ должен быть кратен четырем, то думаю, не заняло много времени попытаться построить пример.

Задача №5.

Предприниматель купил партию некоторого товара. На сколько процентов цена единицы товара при его продаже должна превышать закупочную цену, чтобы количество денег после продажи 2/3 всего товара превышало затраты на покупку всего товара на 20%?

А. На 100%. **Б. На 80%** В. На 50% Г. На 40%

Решение 1:

Обозначим через а закупочную цену единицы товара в условных денежных единицах, а через р% – наценку на эту цену. Цена, по которой реализуется единица

этого товара, равна $a+\frac{p}{100}a=a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ у. е. Стоимость реализации k единиц товара равна $ka\left(1+\frac{p}{100}\right)$ у. е. За $\frac{2}{3}k$ единиц товара предприниматель получит $\frac{2}{3}ka\left(1+\frac{p}{100}\right)$ у. е. Затраты на покупку всей партии товара составляют ka у. е. По условию, должно выполняться равенство $\frac{2}{3}ka\left(1+\frac{p}{100}\right)=1,2ka$ или $\frac{2}{3}\left(1+\frac{p}{100}\right)=1,2$ или $1+\frac{p}{100}=1,8$. Следовательно, p = 80%.

Ответ. Б. На 80%.

Решение 2:

Задача довольно простая и большинство участников с ней справились. Тем более, что при предложенных вариантах ответа имеет место и следующий способ решения:

Решение 2:

Проверим простым перебором предложенные варианты ответа и выберем из них правильный. Пусть на закупку товара предприниматель потратил 100 у. е. Тогда, при наценке на товар 100% за 2/3 товара он выручит 100*2*2/3=400/3, что примерно равно 133, а надо получить 120. При наценке на 50% получится 100*1,5*2/3=100. При наценке 40% получиться еще меньше чем в предыдущем случае, а значит меньше 120. Остается проверить 80%: 100*1,8*2/3=120.

Ответ. Б. На 80%.

<u>Комментарий</u>

При решении задачи первым способом не помешает проверить полученный ответ, чтобы избежать ошибок. Во втором же способе решение строится на проверке ответов и ошибок быть не должно.

3 8-9 класс

Задача №1.

Девять коробков спичек стоили 11 рублей с копейками, а тринадцать таких коробков – 15 рублей с копейками. Пятнадцать таких коробков стоили …

А. 18 руб. 15 коп **Б. 18 руб. 45 коп** В. 18 руб. 75 коп Г. 19 руб. 05 коп

Решение:

Обозначим через x стоимость коробка спичек в копейках. Тогда, по условию,

1100 < 9x < 1200, а 1500 < 13x < 1600. Отсюда следует, что 122 < x ≤ 123. Стоимость одной коробки равнялась 1 руб. 23 коп. Пятнадцать таких коробков стоили 123·15 = 1845 или 18 руб. 45 коп.

Ответ. Б. 18 руб. 45 коп.

Комментарий

Это довольно простая задача. С ней справилось подавляющее большинство участников. Неверный ответ здесь дали в основном те, кто совсем ничего не решал и на тестовые задания отвечал наугад. К сожалению, такие участники тоже есть.

Задача №2.

Коллекционер купил на выставке картину современного художника. Через несколько лет он продал её другому коллекционеру с наценкой p %, а тот продал её клиенту по цене, на p % большей, чем заплатил за неё сам. Окончательная цена картины была на 96 % больше, чем первоначальная. Чему равно p?

А. 20 % Б. 30 % В. 40 % Г. 48 %.

Решение:

Обозначим первоначальную цену картины через a руб. Тогда второй коллекционер заплатил за неё $a + a \cdot \frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ руб., а продал её за $a\left(1 + \frac{p}{100}\right) + a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ руб. По условию, $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}96a$ или $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}4^2$ или $1 + \frac{p}{100} = 1{,}4$, так как p > 0. Отсюда p = 40%.

Ответ. В. 40%.

Комментарий

Простая задача на составления уравнения. С ней справились практически все. Помимо приведенного способа решения, можно было, имея варианты ответа, просто проверить какой из них подходит. Например, если предположить, что ответ А.20% правильный, то можно проверить так:

Возьмем цену картины за 100%, тогда цена ее первой продажи составит 120%, а цена второй продажи соответственно 144% (120*1,2). По условию должно получиться

196%. Из этого делаем вывод, что ответ А.20% неверный. Аналогично проверив остальные ответы, получим, что верный ответ В.40%.

Задача №3.

Четыре школьника А, Б, В, Г прошли тестирование по математике. Известно, что:

Б набрал больше баллов, чем А;

В и А вместе набрали больше баллов, чем Б и Г вместе;

а Г и В вместе набрали столько же баллов, сколько А и Б вместе.

Кто набрал больше всех баллов и кто - меньше всех?

А. Б и Г. Б. В и А. **В. В и Г.** Г. Б и А.

Решение:

Обозначим, через a, b, c, d количества баллов, набранных соответственно школьниками А, Б, В, Г. По условию, $b > a$, $c + a > b + d$, $d + c = a + b$. Из первого и второго неравенств непосредственно следует, что $c > d$. Если прибавить к правой и левой частям второго неравенства соответственно правую и левую часть равенства, то получим неравенство $c + a + d + c > b + d + a + b$. Из него следует, что $c > b$. Из равенства $d + c = a + b$ и неравенства $c > b$ вытекает неравенство $a > d$. Следовательно, справедливы неравенства $c > b > a > d$. Итак, больше всех баллов набрал школьник В, меньше всех – школьник Г.

Ответ. В. В и Г.

Комментарий

С этой задачей справилось большинство участников конкурса. Как видно из решения, никаких специальных навыков оно не требует. Здесь необходимо просто немного по рассуждать. Попробовать совершить, с данными в условии неравенствами и равенством, некоторые арифметические действия и попытаться получить сравнения индивидуальных результатов участников.

Задача №4.

У кошки родилось четверо котят. Какое из приведенных событий наиболее вероятно?

А. Родилось 2 «девочки» и 2 «мальчика».

Б. Родилось 4 «девочки».

В. Родилось 4 «мальчика».

Г. Родилось 3 «девочки» и 1 «мальчик».

Решение 1:

Занумеруем родившихся котят числами 1, 2, 3, 4 и рассмотрим всевозможные варианты количеств «мальчиков» и «девочек», обозначая пол символами 1 и 0.

1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
2	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
3	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
4	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
	1	4				6					1	4				

Принимая, что все варианты равновозможные (а у нас нет оснований отдать предпочтение какому-то из них), и учитывая, что число вариантов рождения пары «девочек» и пары «мальчиков» больше числа вариантов наступления других событий, перечисленных в ответах Б, В, Г, делаем вывод, что наиболее вероятно рождение двух «девочек» и двух «мальчиков».

Ответ. А. Родилось 2 «девочки» и 2 «мальчика».

<u>Комментарий</u>

Если вы хоть немного знакомы с комбинаторикой, то решение этой задачи не потребует перебора всех возможных вариантов, как показано в решении 1.

Решение 2:

Пронумеруем котят от 1 до 4. Каждый из них может быть как одного пола так и другого. Значит всего различных случайных исходов 24=16. Количество исходов с одной «девочкой» и тремя «мальчиками» равно количеству исходов с одним «мальчиком» и тремя «девочками», это количество равно числу вариантов выбора из четырех котят одного, что в свою очередь равно 4. Возможно по одному варианту, когда все «девочки» либо все «мальчики». Таким образом, оставшиеся 16-4-4-1-1=10 случайных исходов приходятся на вариант с двумя «девочками» и двумя «мальчиками». Действительно, количество способов выбрать из четырех два равно 4!/(2!)2=(2*3*4)/(2*2)=6. Таким образом, получаем, что среди четырех случайных исходов, предложенных в вариантах ответов, наиболее вероятен вариант А.

Ответ. А. Родилось 2 «девочки» и 2 «мальчика».

<u>Комментарий</u>

Практически все участники справились с этим заданием. Многие ученики, интересующиеся олимпиадной математикой, изучали различные методические курсы по этому предмету и умеют оперировать с формулами комбинаторики. Если вы еще этого не умеете, вам будет полезно изучить соответственные материалы.

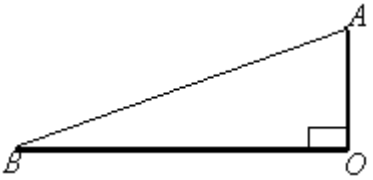
<u>Задача №5.</u>

Человек начал отходить по ровной местности от подножия башни высотой 62 м со скоростью 4 км/ч. Через сколько примерно секунд он будет на расстоянии 200 м от вершины башни? Выберите наиболее точный из приведенных результатов.

А 190 с Б. 180 с **В. 170 с** Г. 160 с

Решение:

На рисунке отрезок ОА изображает башню, отрезок ОВ – путь, пройденный человеком до момента, указанного в условии задачи. Длина отрезка АВ равна расстоянию от человека до вершины башни (ростом человека мы пренебрегаем). Так как местность ровная, то естественно предполагать, что треугольник АВО –



прямоугольный. По построению, его катет OA равен 62 м, а гипотенуза AB – 200 м. Тогда из теоремы Пифагора следует, что $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{40000 - 3844} = \sqrt{36156} \approx 190$ м. Скорость движения человека равна 4 км/ч или $\frac{10}{9}$ м/с. Тогда 190 м он пройдёт за 171 с. Учёт роста человека приводит к несущественному изменению результата. Поэтому наиболее точный результат 170 с.

Ответ. В. 170 с.

<u>Комментарий</u>

Простейшая задача на знание таких вещей как теорема Пифагора и формула равномерного прямолинейного движения. Будучи учениками 8-9 классов эти вещи должны знать все. Поэтому эта задача не вызвала никаких затруднений у участников.

http://eftsh.ru

© еФТШ