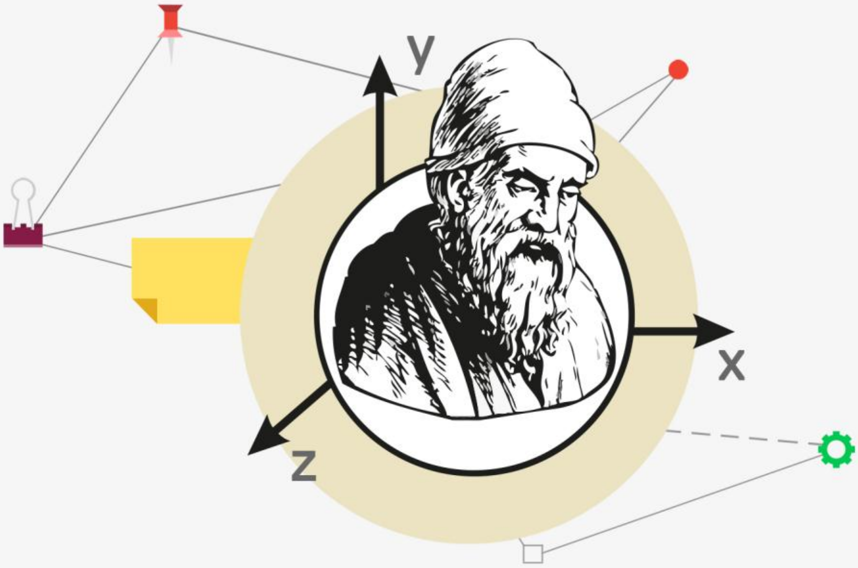


Наследие Евклида

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНКУРС

ЗНАНИКА

Электронная школа

www.znanika.ru

Разбор заданий с открытым ответом и заданий творческой части

4-5 класс. Вариант 1

Задача №6 (4 балла)

У учителя был набор фломастеров. Он хотел выдать пяти школьникам фломастеры одинакового цвета и не смог. Тогда он решил выдать им фломастеры разных цветов и опять не смог. Какое наибольшее количество фломастеров могло быть в наборе учителя?

Решение

Из того, что учитель не смог выдать пяти школьникам фломастеры одинакового цвета следует, что фломастеров каждого цвета было не более четырех. А из того, что он не смог выдать им фломастеры разных цветов следует, что всего цветов было не более четырех. Итого фломастеров было не более чем $4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: 16 фломастеров

Комментарий:

Эта задача оказалась самой трудной для участников конкурса. Только 17% из них смогли ее решить правильно. Здесь важно сделать правильные выводы из каждого условия задачи. При решении подобных задач будет полезно поэкспериментировать с различными наборами фломастеров, тогда можно заметить какие-то закономерности, которые могут помочь в решении.

Задача №7 (4 балла)

Какое наименьшее количество королей надо поставить на доску 5х5, чтобы любая пустая клетка была побита хотя бы одним из королей? (король бьет все 8 клеток вокруг себя).

Решение

Рассмотрим угловые клетки доски 5х5, каждую из них должен бить отдельный король, так как один король не может побить две угловые клетки доски 5х5. Значит, королей должно быть не менее четырех. Четыре короля могут побить все пустые клетки доски 5х5. Пример:

	К		К	
	К		К	

Ответ: 4 короля

Комментарий:

В этой задаче необходимо было построить пример. Задачи подобного рода зачастую имеют стандартные способы решения (такие как раскраска). Понять, что королей не может быть меньше четырех не сложно, а построить пример это уже дело техники. Задачу нельзя назвать сложной, но для ее решения может потребоваться много времени. С этой задачей справились 69% участников.

Задача №8 (4 балла)

В саду у Пети и Кати росло 18 цветочных кустов. Петя полил половину всех кустов, а Катя полила треть всех кустов. При этом оказалось, что два куста были политы по два раза. Сколько цветочных кустов никто не полил?

Решение

Петя полил 18:2=9 кустов. Катя полила 18:3=6 кустов. Два куста были политы по два раза, значит, всего было полито 9+6-2=13 кустов. Тогда не политых кустов осталось 18-13=5.

Ответ: 5 кустов

Комментарий:

Большинство участников справились с данной задачей (69%). Вычисления здесь не сложные, но в них можно иногда запутаться. Подобные задачи помогает решать наглядный рисунок. Обозначив цветочные кусты точками, подписав над каждым кто его полил, проверив все ли условия задачи выполнены, вы точно получите правильный ответ.

Задача №9 (4 балла)

Ахиллес бежал со скоростью 360 метров в минуту и увидел перед собой черепаху на расстоянии 690 метров. Через сколько секунд он догонит черепаху, если она плетется со скоростью 15 метров в минуту?

Решение

Разность скоростей Ахиллеса и черепахи это скорость их сближения 360-15=345 метров в минуту. Расстояние равное 690 метров со скоростью 345 метров в минуту проходится за 690:345=2 минуты. Значит, ровно через 2 минуты Ахиллес догонит черепаху, то есть через $2 \cdot 60 = 120$ секунд.

Ответ: 120 секунд

Комментарий:

Стандартная задача на равномерное прямолинейное движение. С ней справились 67% участников. Подобные задачи встречаются сплошь и рядом на математических конкурсах. Их просто необходимо уметь решать. В подобных задачах зачастую достаточно знать, что путь = скорость * время. Правильно применив данную формулу, ответ вы получите после нескольких вычислений.

Творческое задание

Задача №10 (7 баллов)

Сколькими способами можно разложить число 44 на два слагаемых больших нуля, чтобы одно из них делилось на другое?

Решение

Задача состоит в том, чтобы найти все пары чисел A и B такие, что A делится на B и A+B=44. Так как числа A и B делятся на B, то и их сумма 44 должна делиться на B. Число 44 делится на следующие числа: 1, 2, 4, 11, 22, 44. Так как A делится на B, то B не больше A. Значит, B может равняться 1, 2, 4, 11 или 22, а A=44-B. Таким образом, найдем все возможные пары чисел A и B:

1) 43 и 1;
2) 42 и 2;
3) 40 и 4;
4) 33 и 11;
5) 22 и 22.

Ответ: пятью способами

Комментарий:

С этой задачей справились только 28% участников. Возможно, это связано с тем, что у многих попросту не хватило на нее времени. Ведь задачу можно было решить и полным перебором, выписав все пары чисел (1, 43), (2, 42), …, (22, 22) сумма которых равна 44 и проверив, в каких парах одно число является делителем другого.

Разбор заданий с открытым ответом и заданий творческой части

4-5 класс. Вариант 2

Задача №6 (4 балла)

У кондитера был мешок конфет. Он хоте выдать шести ребятам одинаковые конфеты и не смог. Тогда он решил выдать им разные конфеты и опять не смог. Какое наибольшее количество конфет могло быть в мешке у кондитера?

Решение

Из того, что кондитер не смог выдать шести ребятам одинаковые конфеты следует, что конфет каждого вида было не более пяти. А из того, что он не смог им выдать разные конфеты следует, что всего было не более пяти видов конфет. Таким образом, наибольшее количество конфет у кондитера могло быть $5 \cdot 5 = 25$.

Ответ: 25 конфет

Комментарий:

В этой задаче правильный ответ указали 36% участников. Хотя аналогичную задачу из первого варианта решили только 17%. В условии присутствуют два утверждения накладывающие ограничения на искомый набор конфет. Надо только сделать правильные выводы из каждого утверждения.

Задача №7 (4 балла)

Какое наименьшее количество королей надо поставить на доску 4х4, чтобы любая пустая клетка была побита хотя бы одним из королей? (король бьет все 8 клеток вокруг себя).

Решение

Рассмотрим угловые клетки доски 4х4, каждую из них должен бить отдельный король, так как один король не может побить две угловые клетки доски 4х4. Значит, королей должно быть не менее четырех. Четыре короля могут побить все пустые клетки доски 4х4. Пример:

	К	К	
	К	К	

Ответ: 4 короля

Комментарий:

В этой задаче необходимо было построить пример. Задачи подобного рода зачастую имеют стандартные способы решения (такие как раскраска). Понять, что королей не может быть меньше четырех не сложно, а построить пример это уже дело техники. Задачу нельзя назвать сложной, но для ее решения может потребоваться много времени. С этой задачей справились 55% участников.

Задача №8 (4 балла)

В огороде у родителей было 24 грядки. Папа прополол половину всех грядок, а мама прополола четверть всех грядок. Оказалось, что некоторые грядки пропололи оба родителя, а восемь грядок не прополол никто. Сколько грядок пропололи оба родителя?

Решение

Папа прополол 24:2=12 грядок. Мама прополола 24:4=6 грядок. 8 грядок никто не прополол, значит, они пропололи 24-8=16 различных грядок. Таким образом, 12+6-16=2 грядки пропололи оба родителя.

Ответ: 2 грядки

Комментарий:

Большинство участников справились с данной задачей (59%). Вычисления здесь не сложные, но в них можно иногда запутаться. Подобные задачи помогает решать наглядный рисунок. Обозначив цветочные кусты точками, подписав над каждым кто его полил, проверив все ли условия задачи выполнены, вы точно получите правильный ответ.

Задача №9 (4 балла)

Ахиллес бежал со скоростью 470 метров в минуту и увидел перед собой черепаху на расстоянии 900 метров. Через сколько секунд он догонит черепаху, если она плетется со скоростью 20 метров в минуту?

Решение

Разность скоростей Ахиллеса и черепахи это скорость их сближения 470-20=450 метров в минуту. Расстояние равное 900 метров со скоростью 450 метров в минуту проходится за 900:450=2 минуты. Значит, ровно через 2 минуты Ахиллес догонит черепаху, то есть через $2\cdot 60=120$ секунд.

Ответ: 120 секунд

Комментарий:

Стандартная задача на равномерное прямолинейное движение. С ней справились 55% участников. Подобные задачи встречаются сплошь и рядом на математических конкурсах. Их просто необходимо уметь решать. В подобных задачах зачастую достаточно знать, что путь = скорость * время. Правильно применив данную формулу, ответ вы получите после нескольких вычислений.

Творческое задание

Задача №10 (7 баллов)

Сколькими способами можно разложить число 45 на два слагаемых больших нуля, чтобы одно из них делилось на другое?

Решение

Задача состоит в том, чтобы найти все пары чисел A и B такие, что A делится на B и A+B=45. Так как числа A и B делятся на B, то и их сумма 45 должна делиться на B. Число 45 делится на следующие числа: 1, 3, 5, 9, 15, и 45. Так как A делится на B, то B не больше A. Значит, B может равняться 1, 3, 5, 9 или 15, а A=45-B. Таким образом, найдем все возможные пары чисел A и B:

1) 44 и 1;
2) 42 и 3;
3) 40 и 5;
4) 36 и 9;
5) 30 и 15.

Ответ: пятью способами

Комментарий:

С этой задачей справились только 21% участников. Возможно, это связано с тем, что у многих попросту не хватило на нее времени. Ведь задачу можно было решить и полным перебором, выписав все пары чисел (1, 44), (2, 43), …, (22, 23) сумма которых равна 45 и проверив, в каких парах одно число является делителем другого.

Разбор заданий с открытым ответом и заданий творческой части

6-7 класс. Вариант 1

<u>Задача №6 (4 балла)</u>

Какое наименьшее количество выстрелов необходимо сделать в игре «Морской бой» на доске 8х8, чтобы точно ранить расположенный корабль 4х4?

Решение

На доске 8х8 можно расположить 4 непересекающихся корабля 4х4, следовательно, трех выстрелов может не хватить. Сделав четыре выстрела можно наверняка ранить корабль 4х4, если выстрелить следующим образом:

		x			x		
		x			x		

Ответ: 4 выстрела

Комментарий:

62% участников привели верный ответ в этой задаче. Понять, что трех выстрелов может не хватить не сложно, да и примеров для четырех тут не мало. В качестве упражнения можете попробовать их поискать.

<u>Задача №7 (4 балла)</u>

Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 200, которые делятся на 5, но не делятся на 13?

Решение

Всего среди чисел, не превосходящих 200, есть 200:5=40 чисел делящихся на 5. Среди них $200:(13\cdot 5)=3$ (остаток 5) три числа делящихся на 13. Значит, 40-3=37 чисел, не превосходящих 200, делятся на 5, но не делятся на 13.

Ответ: 37 чисел

Комментарий:

Данная задача оказалась одной из самых сложных среди предложенных задач. Правильный ответ здесь привели только 35% участников. Казалось бы, решение не такое уж и сложное, возможно многие не смогли понять, как среди чисел, делящихся на 5 найти те, которые делятся на 13. Перебором данная задача тоже решается, но это бы потребовало уйму времени.

<u>Задача №8 (4 балла)</u>

Банкомат умеет выполнять две операции. Может принять сумму 140 рублей, либо выдать сумму 350 рублей. На счету лежит 1000 рублей. Какую минимальную сумму денег можно оставить на счете пользуясь данными операциями?

Решение

Наибольший общий делитель чисел 140 и 350 равен 70. Значит любая сумма, которую можно снять со счета используя данные операции, будет делиться на 70. Наибольшее число, делящееся на 70, но не превосходящее 1000 это 980. 980 рублей можно снять, положив 3 раза по 140 рублей и сняв 4 раза по 350. $4\cdot 350-3\cdot 140=980$. Таким образом, наименьшая сумма, которую можно оставить на счету, равна 1000-980=20 рублей.

Ответ: 20 рублей

Комментарий:

Правильный ответ в этой задаче нашли 71% участников. Осмелюсь предположить, что многие из них нашли ответ экспериментально и не доказывали его минимальность. Таким людям советую внимательно разобраться в решении, ведь в другой раз в подобной задаче может потребоваться не только ответ.

Задача №9 (4 балла)

В первый день дальнобойщик проехал 25% всего маршрута и еще 15 км. Во второй день он проехал 20% остатка и еще 48 км. В третий день половину оставшегося расстояния и еще 20 км. Остальные 220 км он проехал на четвертый день. Сколько км составил весь маршрут дальнобойщика?

Решение

Обозначим за x всё расстояние, пройденное дальнобойщиком.

Тогда, в первый день дальнобойщик проехал - $0{,}25 \cdot x + 15$ км.

Во второй – $(x-(0{,}25x+15)) \cdot 0{,}2+48=(0{,}75x-15) \cdot 0{,}2+48=0{,}15x+45$ км.

В третий – $(x-(0{,}25x+15+0{,}15x+45)) \cdot 0{,}5+20=(0{,}6x-60) \cdot 0{,}5+20=0{,}3x-10$ км.

В четвертый – 220 км.

Итого $x=(0{,}25x+15)+(0{,}15x+45)+(0{,}3x-10)+220$

$x=0{,}7x+270$

$0{,}3x=270$

$x=900$ (км)

Ответ: 900 км

Комментарий:

Только половина участников (53%) справились с данной задачей. Задача требовала особой внимательности. В таком количестве дробей не сложно ошибиться. В подобных задачах просто обязательно надо проверять полученный ответ.

Творческое задание

Задача №10 (7 балла)

По кругу расставлены числа от 1 до 27 в случайном порядке. Докажите, что сумма некоторых трех подряд стоящих чисел не меньше 42.

Решение

Разобьем числа на группы по три рядом стоящих числа. Всего получится 27:3=9 групп. Предположим, что сумма чисел в каждой группе не более 41, тогда сумма всех чисел не более $41 \cdot 9=369$. Но сумма чисел от 1 до 27 равна $27 \cdot 28:2=378$. Получили противоречие. Следовательно, найдется тройка подряд идущих чисел, сумма которых не меньше 42.

Комментарий:

Задача довольно простая. Предполагаешь, что сумма всегда меньше 42 и после нескольких очевидных выводов получаешь противоречие. Причем решение в ней не единственное. Например, не обязательно делить числа на группы, можно посчитать суммы всех троек подряд идущих чисел. Тогда каждое число будет посчитано в сумме по три раза и, разделив полученную сумму на 3, получим то же самое противоречие. В этой задаче только 31% участников привели подробное и правильное решение.

Разбор заданий с открытым ответом и заданий творческой части

6-7 класс. Вариант 2

Задача №6 (4 балла)

Какое наименьшее количество выстрелов необходимо сделать в игре «Морской бой» на доске 6х6, чтобы точно ранить расположенный корабль 3х3?

Решение

На доске 6х6 можно расположить 4 непересекающихся корабля 3х3, следовательно, трех выстрелов может не хватить. Сделав четыре выстрела можно наверняка ранить корабль 3х3, если выстрелить следующим образом:

	X			X	
	X			X	

Ответ: 4 выстрела

Комментарий:

Чуть больше половины участников (54%) привели верный ответ в этой задаче. Понять, что трех выстрелов может не хватить не сложно, да и примеров для четырех тут не мало. В качестве упражнения можете попробовать их поискать.

Задача №7 (4 балла)

Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 200, которые делятся на 7, но не делятся на 11?

Решение

Всего среди чисел, не превосходящих 200, есть 200:7=28 (4 остаток) чисел делящихся на 7. Среди них $200:(11\cdot 7)=2$ (остаток 46) два числа делящихся на 11. Значит, 28-2=26 чисел, не превосходящих 200, делятся на 7, но не делятся на 11.

Ответ: 26 чисел

Комментарий:

С данной задачей справились 53% участников. Казалось бы, решение не такое уж и сложное, возможно многие не смогли понять, как среди чисел, делящихся на 7 найти те, которые делятся на 11. Перебором данная задача тоже решается, но это бы потребовало уйму времени.

Задача №8 (4 балла)

Банкомат умеет выполнять две операции. Может принять сумму 120 рублей, либо выдать сумму 300 рублей. На счету лежит 1000 рублей. Какую максимальную сумму денег можно снять со счета пользуясь данными операциями?

Решение

Наибольший общий делитель чисел 120 и 300 равен 60. Значит любая сумма, которую можно снять со счета используя данные операции, будет делиться на 60. Наибольшее число, делящееся на 60, но не превосходящее 1000 это 960. 960 рублей можно снять, положив 2 раза по 120 рублей и сняв 4 раза по 300. $4\cdot 300-2\cdot 120=960$. Таким образом, наибольшая сумма, которую можно снять со счета, равна 960 рублей.

Ответ: 960 рублей

Комментарий:

Правильный ответ в этой задаче нашли половина (50%) участников. Осмелюсь предположить, что многие из них нашли ответ экспериментально и не доказывали его максимальность. Таким людям советую внимательно разобраться в решении, ведь в другой раз в подобной задаче может потребоваться не только ответ.

Задача №9 (4 балла)

В первый день путешественник прошел 20% всего пути и еще 2 км. Во второй день он прошел 50% остатка и еще 1 км. В третий день 25% оставшегося расстояния и еще 3 км. Остальные 18 км он прошел на четвертый день. Сколько км прошел путешественник за 4 дня пути?

Решение

Обозначим за х всё расстояние, пройденное путешественником.

Тогда, в первый день путешественник прошел - $0,2\cdot x+2$ км.

Во второй – $(x-(0,2x+2))\cdot 0,5+1=(0,8x-2)\cdot 0,5+1=0,4x$ км.

В третий – $(x-(0,2x+2+0,4x))\cdot 0,25+3=(0,4x-2)\cdot 0,25+3=0,1x+2,5$ км.

В четвертый – 18 км.

Итого $x=(0,2x+2)+0,4x+(0,1x+2,5)+18$

$x=0,7x+22,5$

$0,3x=22,5$

$x=75$ (км)

Ответ: 75 км

Комментарий:

Только 29% участников справились с данной задачей. Задача требовала особой внимательности. В таком количестве дробей не сложно ошибиться. В подобных задачах просто обязательно надо проверять полученный ответ.

Творческое задание

Задача №10 (7 баллов)

По кругу расставлены числа от 1 до 21 в случайном порядке. Докажите, что сумма некоторых трех подряд стоящих чисел не меньше 33.

Решение

Разобьем числа на группы по три рядом стоящих числа. Всего получится 21:3=7 групп. Предположим, что сумма чисел в каждой группе не более 32, тогда сумма всех чисел не более $32\cdot 7=224$. Но сумма чисел от 1 до 21 равна $21\cdot 22:2=231$. Получили противоречие. Следовательно, найдется тройка подряд идущих чисел, сумма которых не меньше 33.

Комментарий:

Задача довольно простая. Предполагаешь, что сумма всегда меньше 33 и после нескольких очевидных выводов получаешь противоречие. Причем решение в ней не единственное. Например, не обязательно делить числа на группы, можно посчитать суммы всех троек подряд идущих чисел. Тогда каждое число будет посчитано в сумме по три раза и, разделив полученную сумму на 3, получим то же самое противоречие. В этой задаче только 26% участников привели подробное и правильное решение.

Разбор заданий с открытым ответом и заданий творческой части

8-9 класс. Вариант 1

Задача №6 (4 балла)

У столяра есть 185 палочек. Из 7 палочек он может сделать игрушечный шкаф, из 10 палочек – машину, из 20 палочек – корабль. Корабль стоит 25 монет, машина – 12 монет, а шкаф – 8 монет. Какое наибольшее количество монет может заработать столяр?

Решение

Назовем набор игрушек «идеальным», если нельзя сделать более дорогой по стоимости набор затратив не более 185 палочек. Очевидно, что сделав идеальный набор игрушек, палочек останется не более 6, иначе к нему можно будет доделать еще один шкаф. Рассмотрим произвольный набор игрушек, который может сделать столяр, и посмотрим, как можно было увеличить его стоимость, истратив тоже количество палочек либо меньшее. Если в наборе есть 3 шкафа, то сделав вместо них один корабль, стоимость набора будет больше, так как 24<25, а палочек потребуется меньше 20<21. Аналогично, вместо двух машин, всегда можно делать корабль, и затратив тоже количество палочек, итоговая стоимость будет больше. Таким образом, получаем, что в идеальном наборе может быть не более одной машины и не более двух шкафов.

Если кораблей сделать 7, то на них потребуется 140 палочек, 2 шкафа – 14 палочек и одна машина - это еще 10 палочек. Итого 140+10+14=164, остается еще 21 палочка. Значит, из выше изложенного следует, что идеальный набор не может содержать только 7 кораблей. Таким образом, получаем, что в идеальном наборе хотя бы 8 кораблей. Если их 9, тогда останется $185-9\cdot 20=5$ палочек, из которых ничего нельзя сделать, а стоимость набора будет равна $25\cdot 9=225$. Если же кораблей 8, то на них ушло 160 палочек, из выше сказанного следует, что для максимальной стоимости набора, из оставшихся 25 палочек необходимо сделать одну машину и два шкафа. Итого стоимость набора будет равна $25\cdot 8+12\cdot 1+8\cdot 2=228$ монет, а палочек потребуется $20\cdot 8+10\cdot 1+7\cdot 2=184$.

Ответ: 228 монет

Комментарий:

Данная задача оказалась самой сложной среди предложенных задач. Правильный ответ здесь смогли привести только 9% участников. Решение данной задачи требовало достаточно много времени, хотя ответ можно было попробовать получить экспериментальным путем. Именно поэтому задача была предложена во второй части конкурса и не требовала доказательства. В задаче требовалось найти оптимальный алгоритм. Для тех, кто в будущем хочет заниматься программированием будет особо полезно разобраться в решении данной задачи.

Задача №7 (4 балла)

Клетки доски 3х3 занумерованы числами от 1 до 9 так, что соседние номера стоят в соседних по стороне клетках. Какова наименьшая возможная сумма номеров на диагонали?

Решение

Если раскрасить клетки доски в шахматном порядке, то клетки одинакового цвета будут занумерованы числами одинаковой четности. Таким образом, становится понятно, что сумма на диагонали не может быть меньше 1+3+5=9. Но числа 1, 3 и 5 не могут быть на одной диагонали, так как очевидно, что числа 7 и 9 не могут располагаться в противоположных углах доски. Следующая наименьшая сумма трех чисел от 1 до 9 одинаковой четности равна 1+3+7=11. Для этой суммы построим пример:

1	2	9
4	3	8
5	6	7

Ответ: 11

Комментарий:

Половина участников (49%) указали в этой задаче правильный ответ. Доказательство минимальности полученного ответа здесь не самое простое. Именно поэтому задача была предложена во второй части конкурса. Тем, кто указал ответ интуитивно и не смог строго доказать его минимальность будет полезно разобраться в решении подробно.

Задача №8 (4 балла)

Сколько различных слов (необязательно осмысленных) можно составить из слова ТОРТ, переставив буквы?

Решение

Всего существует $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа перестановки четырех букв. Но так как одна буква повторяется два раза, то среди всех этих перестановок каждое слово будет также повторяться два раза. Значит, различных слов будет 24:2=12.

Ответ: 12 различных слов

Комментарий:

Еще одна задача на комбинаторику, но на этот раз более сложная. Ее смогли решить только 35% участников. Основная ошибка остальных в данной задаче была в том, что они посчитали ответ 4*3*2*1=24. Но в нем каждое слово посчитано дважды, ведь в слове ТОРТ есть повторяющаяся буква Т.

Задача №9 (4 балла)

На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2017. За одну операцию разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них число a+b-1. После некоторого количества таких операций на доске останется одно число. Какое?

Решение

Рассмотрим сумму чисел на доске: 1+2+…+2017=2035153. После каждой операции на доске становится на одно число меньше, а сумма чисел уменьшается на 1. Значит, после 2016 операций на доске останется одно число, и оно будет равно 2035153-2016=2033137.

Ответ: 2033137

Комментарий:

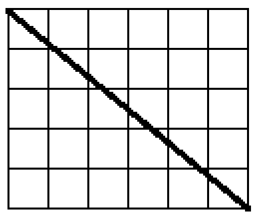
Решение задачи не выглядит сложным, и многие неверные ответы участников были похожи на правильный ответ. Возможно, многие поняли идею решения, но допустили ошибку в вычислениях. Верный ответ здесь привели лишь 16% участников. Подобные задачи часто помогает решать упрощенный пример. Если взять вместо чисел от 1 до 2017, числа от 1 до 5 (например), и поэкспериментировать с ними, то возможно вы увидите какие-то принципы и закономерности, которые помогут вам в решении данной задачи.

Творческое задание

Задача №10 (7 баллов)

Дан прямоугольник 5х6, разбитый линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ прямоугольника.

Решение



Найдем количество пересечений линий сетки с диагональю. Каждая вертикальная линия пересекает диагональ в одном месте и каждая горизонтальная – в одном. Итого 7+6=13 точек. В углах прямоугольника точки пересечения вертикальной и горизонтальной линии совпадают. Значит, остается 13-2=11 точек. Докажем, что они все различны. Действительно, если бы еще какие либо точки пересечения совпали, то данная диагональ содержала бы в себе также и диагональ прямоугольника AxB, где A<5, а B<6. Тогда стороны прямоугольника 5х6 должны были бы делиться на A и B соответственно и при делении давать один и тот же результат. Но так как числа 5 и 6 взаимно простые, то это невозможно. Следовательно, диагональ содержит 11 различных точек пересечения с линиями сетки, а значит, они делят ее на 10 отрезков.

Комментарий:

С данной задачей справились только 19% участников. Сложность данной задачи заключается в том, что требовалось аккуратно и строго доказать полученный ответ, чего многие сделать не смогли. Большинство решений опирались лишь на рисунок, но математика наука точная и одного только рисунка не достаточно для решения подобной задачи.

Разбор заданий с открытым ответом и заданий творческой части

8-9 класс. Вариант 2

Задача №6 (4 балла)

У столяра есть 130 палочек. Из 5 палочек он может сделать игрушечный табурет, из 7 палочек – пароход, из 14 палочек – самолет. Самолет стоит 19 монет, пароход – 8 монет, а табурет – 6 монет. Какое наибольшее количество монет может заработать столяр?

Решение

Назовем набор игрушек «идеальным», если нельзя сделать более дорогой по стоимости набор затратив не более 130 палочек. Очевидно, что сделав идеальный набор игрушек, палочек останется не более 4, иначе к нему можно будет доделать еще один табурет. Рассмотрим произвольный набор игрушек, который может сделать столяр, и посмотрим, как можно было увеличить его стоимость, истратив тоже количество палочек либо меньшее. Если в наборе есть 3 табурета, то сделав вместо них один самолет, стоимость набора будет больше, так как 18<19, а палочек потребуется меньше 14<15. Аналогично, вместо двух пароходов, всегда можно делать самолет, и затратив тоже количество палочек, итоговая стоимость будет больше. Таким образом, получаем, что в идеальном наборе может быть не более одного парохода и не более двух табуретов.

Если самолетов сделать 7, то на них потребуется 98 палочек, 2 табурета – 10 палочек и один пароход это еще 7 палочек. Итого 98+10+7=115, остается еще 15 палочек. Значит, из выше изложенного следует, что идеальный набор не может содержать только 7 самолетов. Таким образом, получаем, что в идеальном наборе хотя бы 8 самолетов. Если их 9, тогда останется $130-9\cdot 14=4$ палочки, из которых ничего нельзя сделать, а стоимость набора будет равна $19\cdot 9=171$. Если же самолетов 8, то на них ушло 112 палочек, из выше сказанного следует, что для максимальной стоимости набора, из оставшихся 18 палочек необходимо сделать один пароход и два табурета. Итого стоимость набора будет равна $19\cdot 8+8\cdot 1+6\cdot 2=172$ монеты, а палочек потребуется $14\cdot 8+7\cdot 1+5\cdot 2=129$.

Ответ: 172 монеты

Комментарий:

Данная задача оказалась самой сложной среди предложенных задач. Правильный ответ здесь смогли привести только 15% участников. Решение данной задачи требовало достаточно много времени, хотя ответ можно было попробовать получить экспериментальным путем. Именно поэтому задача была предложена во второй части конкурса и не требовала доказательства. В задаче требовалось найти оптимальный алгоритм. Для тех, кто в будущем хочет заниматься программированием будет особо полезно разобраться в решении данной задачи.

Задача №7 (4 балла)

Клетки доски 3х3 занумерованы числами от 1 до 9 так, что соседние номера стоят в соседних по стороне клетках. Какова наибольшая возможная сумма номеров на диагонали?

Решение

Если раскрасить клетки доски в шахматном порядке, то клетки одинакового цвета будут занумерованы числами одинаковой четности. Таким образом, становится понятно, что сумма на диагонали не может быть больше 9+7+5=21. Но числа 9, 7 и 5 не могут быть на одной диагонали, так как очевидно, что числа 1 и 3 не могут располагаться в противоположных углах доски. Следующая наибольшая сумма трех чисел от 1 до 9 одинаковой четности равна 9+7+3=19. Для этой суммы построим пример:

9	8	1
6	7	2
5	4	3

Ответ: 19

Комментарий:

31% участников указали в этой задаче правильный ответ. Доказательство максимальности полученного ответа здесь не самое простое. Именно поэтому задача была предложена во второй части конкурса. Тем, кто указал ответ интуитивно и не смог строго доказать его максимальность будет полезно разобраться в решении подробно.

Задача №8 (4 балла)

Сколько различных слов (необязательно осмысленных) можно составить из слова АРФА, переставив буквы?

Решение

Всего существует $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа перестановки четырех букв. Но так как одна буква повторяется два раза, то среди всех этих перестановок каждое слово будет также повторяться два раза. Значит, различных слов будет 24:2=12.

Ответ: 12 различных слов

Комментарий:

Еще одна задача на комбинаторику, но на этот раз более сложная. Ее смогли решить 46% участников. Основная ошибка остальных в данной задаче была в том, что они посчитали ответ 4*3*2*1=24. Но в нем каждое слово посчитано дважды, ведь в слове АРФА есть повторяющаяся буква А.

Задача №9 (4 балла)

На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2017. За одну операцию разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них число a+b+1. После некоторого количества таких операций на доске останется одно число. Какое?

Решение

Рассмотрим сумму чисел на доске. 1+2+…+2017=2035153. После каждой операции на доске становится на одно число меньше, а сумма чисел увеличивается на 1. Значит, после 2016 операций на доске останется одно число, и оно будет равно 2035153+2016=2037169.

Ответ: 2037169

Комментарий:

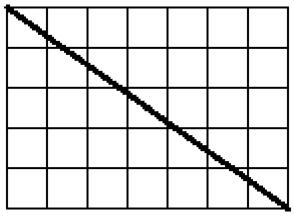
Решение задачи не выглядит сложным, и многие неверные ответы участников были похожи на правильный ответ. Возможно, они поняли идею решения, но допустили ошибку в вычислениях. Верный ответ здесь привели лишь 6% участников. Подобные задачи часто помогает решать упрощенный пример. Если взять вместо чисел от 1 до 2017, числа от 1 до 5 (например), и поэкспериментировать с ними, то возможно вы увидите какие-то принципы и закономерности, которые помогут вам в решении данной задачи.

Творческое задание

Задача №10 (7 баллов)

Дан прямоугольник 5x7, разбитый линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ прямоугольника.

Решение



Найдем количество пересечений линий сетки с диагональю. Каждая вертикальная линия пересекает диагональ в одном месте и каждая горизонтальная – в одном. Итого 8+6=14 точек. В углах прямоугольника точки пересечения вертикальной и горизонтальной линии совпадают. Значит, остается 14-2=12 точек. Докажем, что они все различны. Действительно, если бы еще какие либо точки пересечения совпали, то данная диагональ содержала бы в себе также и диагональ прямоугольника AxB, где A<5, а B<7. Тогда стороны прямоугольника 5x7 должны были бы делиться на A и B соответственно и при делении давать один и тот же результат. Но так как числа 5 и 7 взаимно простые, то это невозможно. Следовательно, диагональ содержит 12 различных точек пересечения с линиями сетки, а значит, они делят ее на 11 отрезков.

Комментарий:

С данной задачей справились только 12% участников. Сложность данной задачи заключается в том, что требовалось аккуратно и строго доказать полученный ответ, чего многие сделать не смогли. Большинство решений опирались лишь на рисунок, но математика наука точная и одного только рисунка недостаточно для решения подобной задачи.

ЗНАНИКА