Карта Сокровищ 2013.

Задания для 8-9 классов.

Часть 1.

Задача №1.

Камень весит 6 кг, еще треть камня и еще половину камня. Сколько весит камень?

А. 24 кг Б. 10 кг В. 36 кг Г. 48 кг

Решение:

Пусть X-вес камня. Составим уравнение: $6+1/3X+1/2X=X$, получаем $X=36$.

Ответ: В. 36 кг.

Если вы умеете составлять линейные уравнения, то с такими задачами не должно возникать проблем. С ней справились практически все.

Задача №2.

В ряд выложены несколько апельсинов, мандаринов, яблок и бананов. Оказалось, что рядом с фруктом каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее число фруктов могло быть выложено?

А. 7 Б. 8 В. 9 Г. 10

Решение:

Докажем сначала, что всего фруктов не менее восьми. Предположим, что их меньше, тогда фруктов какого-то вида не более одного (так как если всех не меньше двух, то всего не меньше восьми). Тогда у такого фрукта не более двух соседей, что противоречит условию. Значит всего фруктов не менее восьми. Пример показывающий, что восемь фруктов может быть: АМЯБАЯМБ.

Ответ: Б. 8.

Ошибку в этой задаче можно допустить, только если у вас не получится построить пример для восьми фруктов. Но если просто начать последовательно располагать фрукты в ряд, стараясь удовлетворить условие задачи, то вы легко получите такой пример. Пронумеруем фрукты от 1 до 4 для простоты восприятия. Положим в ряд всех фрукты по очереди 1234, далее будем докладывать фрукты так, чтобы создавать новые пары. Уже имеются пары 12, 23 и 34. Осталось добавить 13, 14, 24 (или же они могут выглядеть как 31, 41 и 42). Тут есть множество вариантов. Самый простой способ, просто добавлять необходимые пары к уже имеющемуся ряду 1234. Так как нам необходимо создать пару 14(или де 41) то добавим в конец ряда 1, далее из тех же соображений добавим 3. Уже имея ряд из шести фруктов 123413, нам остается только добавить пару 24 в конец ряда.

Задача №3.

Найдите наименьшее натуральное число n такое, что в любом множестве из n натуральных чисел найдутся два числа, сумма или разность которых делится на 7.

А. 4 Б. 5 В. 6 Г. 7

Решение 1:

Сначала докажем, что $n>4$. Это верно, так как среди чисел 1 2 3 7 нет такой пары, в которой сумма либо разность делиться на 7. Докажем теперь, что среди любых пяти чисел такая пара найдется. Разобьем числа на группы. Первая группа будет содержать числа кратные 7. Вторая – числа, дающие в остатке 1 либо 6 при делении на 7. Третья – числа, дающие в остатке 2 либо 5 при делении на 7. И последняя четвертая группа будет включать в себя числа, дающие в остатке 3 либо 4 при делении на 7. Так как чисел пять, а групп четыре, то найдется такая группа, в которой будет хотя бы два числа. Если эти числа дают одинаковый остаток при делении на 7, то их разность кратна 7. А если же они дают разный остаток, то их сумма будет кратна 7.

Ответ: Б. $n=5$.

Решение 2:

Можно проявить несколько иной подход к решению данной задачи. Предположим, что мы имеем набор чисел, среди которых нет пары чисел сумма либо разность которых кратна 7. Оценим, сколько чисел может быть в таком наборе. Для начала заметим, что там нет двух чисел дающих одинаковый остаток при делении на 7 (иначе их разность кратна 7). Всего при делении на 7 может быть 7 различных остатков (от 0 до 6). Значит в нашем наборе не более семи чисел. Осталось воспользоваться условием, что попарные суммы не делятся на 7. Заметим, что $1+6=7$, $2+5=7$ и $3+4=7$. Значит, в наборе не может одновременно быть чисел дающих в остатке 1 и 6 при делении на 7. Также с 2 и 5. Также с 3 и 4. Получается, что в таком наборе не может быть более 4ех чисел. Значит, если мы имеем набор из пяти натуральных чисел, то в нем найдутся два числа, сумма либо разность которых делится на 7.

Ответ: Б. $n=5$.

Если у вас не получается строго доказать то, что ваш ответ правильный. Но, тем не менее, вы не можете построить к нему контрпример, то можете смело давать ответ. В данном случае, задача находилась в тестовой части конкурса и не требовала подробного доказательства. И окажись ваш ответ правильным, вы получили бы полный балл.

Дорогие друзья. Если у вас возникают трудности с заданиями, в которых достаточно привести ответ, попробуйте хотя бы его угадать. Если ваши догадки окажутся верными, вы не только получите баллы за задание, но и много положительных эмоций, когда увидите, что интуиция вас не подвела.

Задача №4.

На шахматной доске стоят 10 шахматных фигур (слоны и ладьи), не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество слонов может быть среди них?

А. 2 Б. 3 В. 4 Г. 5

Решение:

Узнаем, какое максимальное количество ладьей может быть данных условиях. Понятно, что ладьей не может быть 9 или 10, так как среди них найдутся бьющие друг друга. Если их 8, то они бьют всю шахматную доску и не остается места для слонов. Даже если ладьей 7, то на доске остается всего 1 не побитая клетка, поэтому три слона там не могут располагаться. Если же ладьей 6, а слонов 4 (пара примеров):

				л			
с							с
					л		
						л	
	л						
		л					
с							с
			л				

					л		
						л	
				л			
с							с
с							с
			л				
	л						
		л					

Значит наименьшее возможное количество слонов равно четырем.

Ответ: В.4.

Хотелось бы сказать что-нибудь по поводу того как построить пример для ответа в этой задаче, но похоже, что это один из тех случаев, когда в помощь приходит только метод проб и ошибок. Единственная полезная вещь, которую тут можно заметить, что после расстановки шести ладьей на доске остается ровно 4 небитых клетки. Ну и очевидным становится то, что слоны, расположенные в этих клетках образуют на доске прямоугольник (с разной шириной и высотой).

Задача №5.

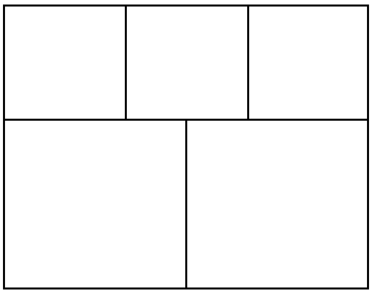
На какое минимальное число квадратов (не обязательно равных) можно разрезать прямоугольник размером 5х6?

А. 3 Б. 4 В. 5 Г. 6

Решение:

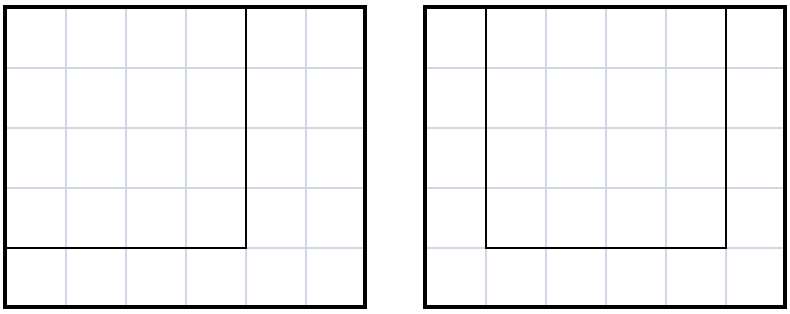
Задача решается простым перебором. Не буду подробно объяснять каждый изложенный ниже факт, они довольно очевидные. Для практики можете попробовать проверить их сами на листе бумаги.

Пример того, как разрезать прямоугольник размером 5х6 на 5 квадратов:



Три квадрата со стороной 2 и два квадрата со стороной 3.

Если бы требовалось привести подробное решение данной задачи, советовал бы начать так. Предположим, что можно разрезать прямоугольник на меньшее количество квадратов (чем 5). Рассмотрим, каким может быть наибольший (или один из наибольших) квадрат, полученный при разрезании. Очевидно, его сторона не может превышать 5. Если его сторона равна 5, то нетрудным перебором получаем, что оставшуюся часть прямоугольника нельзя порезать на 1, 2 или 3 квадрата (только на 5). Если сторона наибольшего квадрата равна 4, оставшаяся часть также не делится на 1, 2, или 3 квадрата.



При стороне наибольшего квадрата равной 3, при помощи площадей можно показать, что наименьшее число квадратов равно пяти. 5х6=30, 3х3=9. Оставшаяся площадь равна 21. Площади квадратов могут быть равны 1, 4 и 9. Путем небольшого перебора получаем 9+4+4+4=21.

Уважаемые участники конкурсов, если в задачах просят «найти наименьшее (или наибольшее)…» и вы не можете построить пример, для какого либо меньшего (или большего) ответа, чем ваш, постарайтесь доказать, что такого примера не существует. Это будет полезно как для вашей практики в математике, так и для сохранения баллов в конкурсных задачах.