Волшебный сундучок

Всероссийский математический конкурс

Разбор задач четвертой части заданий

7 класс

6	7	8	9	10
А	Б	Б	А	В

<u>Задача №6</u>

Сравните длину пути l, преодолеваемого концом минутной стрелкой механических часов за 10 минут, с длиной этой стрелки l_1.

А. l > l1. Б. l = l1. В. l < l1. Г. Сравнить нельзя.

Решение

За 10 минут минутная стрелка сделала $\frac{1}{6}$ оборота. Следовательно, её конец пройдет путь, равный $\frac{1}{6}\cdot 2\pi l_1 = \frac{1}{3}\cdot \pi l_1$, что больше l_1, так как $\pi > 3$.

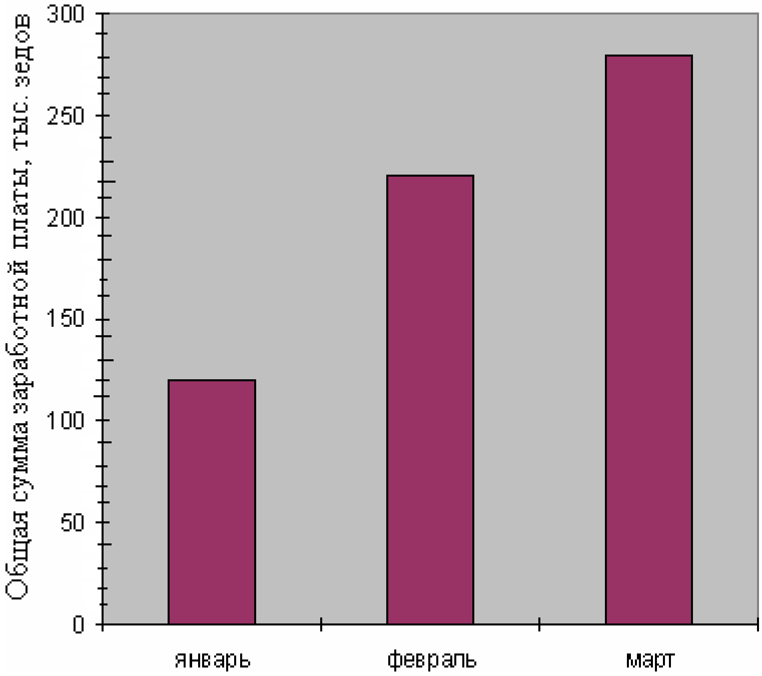
Ответ: А. $l > l_1$.

<u>Комментарий</u>

В этой задаче очень много неверных ответов, хотя единственное, что нужно было вспомнить – это формулу длины окружности. Среди неверных ответов часто встречался ответ Б, возможно возникла путаница длины пути и перемещения конца минутной стрелки (перемещение действительно равно длине стрелки).

<u>Задача №7</u>

На диаграмме изображена начисленная фирмой общая сумма заработной платы всем своим сотрудникам в январе, феврале и марте 2013 года (зед — условная денежная единица). В январе на фирме работали 15 сотрудников, в феврале — 18, а в марте — 25. Как изменилась средняя начисленная заработная плата в этой фирме в марте по сравнению с январём?



А. Увеличилась более чем на 4000 зедов.

Б. Увеличилась менее чем на 4000 зедов.

В. Уменьшилась более чем на 4000 зедов.

Г. Уменьшилась менее чем на 4000 зедов.

Решение

Из диаграммы видно, что в январе общая заработная плата на фирме составляла 120 тыс. зедов, а в марте — 280 тыс. зедов. Так как в январе на фирме работали 15 сотрудников, а в марте — 25, то средняя зарплата одного сотрудника в январе составила 120 000:15 = 8 000 (зедов), а в марте — 280 000: 25 = 11 200 (зедов), то есть она увеличилась на 3 200 зедов, что меньше 4 000 зедов.

Ответ: Б. Увеличилась менее чем на 4000 зедов.

Комментарий

Большинство школьников с задачей справились. В одной из работ, где школьник приводил решения в том числе на тестовые задачи (этого делать не требовалось, но такие работы помогают понять типичные ошибки), ответ А был получен за счет того, что он посчитал, что на графике средняя зарплата одного работника в зедах, а сравнить нужно общий зарплатный фонд. Видимо все остальные неверные ответы были получены так же из-за не внимательно прочитанных условий.

Задача №8

В классе есть девочки и мальчики. Какое из утверждений может быть истинным?

А. Каждый мальчик ниже какой-то девочки, и каждая девочка не выше любого мальчика.

Б. Каждый мальчик ниже какой-то девочки, и какая-то девочка не выше любого мальчика.

В. Каждый мальчик не выше какой-то девочки, и любая девочка ниже любого мальчика.

Г. Какой-то мальчик ниже любой девочки, и какая-то девочка не выше любого мальчика.

Решение

Каждое из утверждений, приведённых в ответе, состоит из двух более простых утверждений. Истинным может быть то утверждение, в котором оба простых утверждения не противоречат друг другу.

Утверждение А не может быть истинным, так как если каждый мальчик ниже какой-то девочки, то каждая девочка не может быть ниже любого мальчика или совпадать по росту с любым мальчиком: одна девочка выше всех мальчиков.

Утверждение В не может быть истинным, так как если каждый мальчик не выше какой-то девочки, и любая девочка не может быть ниже любого мальчика.

Утверждение Г не может быть истинным, так как если какой-то мальчик ниже любой девочки, то все девочки не могут быть не выше любого мальчика.

Утверждение Б истинно, так как если каждый мальчик ниже какой-то девочки, то это не исключает того, что какая-то другая девочка не выше любого мальчика.

Ответ: Б.

Комментарий

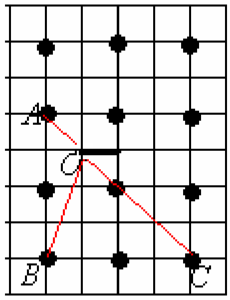
Больше половины участников решили задачу верно. Среди неправильных чаще всего встречался ответ Г. Он не может быть верным, потому что если мы возьмем того самого мальчика, который ниже любой девочки, то какую бы девочку мы не взяли, она будет выше его.

Задача №9

Робот начинает движение в некоторой точке, в начале движения он выбирает направление перемещения. Далее робот движется прямолинейно 10 м, затем поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м, далее снова поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м и т. д. Сколько различных расстояний может отделять робота от начала пути, если он остановился на месте 6-го поворота?

А. 3. Б. 4. В. 5. Г. 6.

Решение



Изобразим первое перемещение робота горизонтальным отрезком. Тогда дальнейшее движение робота будет проходить по сторонам квадратной сетки, изображённой на рисунке, со стороной 10 м. Точка О — начало движения.

Возможные варианты расположения робота непосредственно перед 6-м поворотом отмечены на рисунке жирными точками. Возможные расстояния от начала движения до места 6-го поворота могут равняться: ОА, ОВ, ОС. Всего их 3.

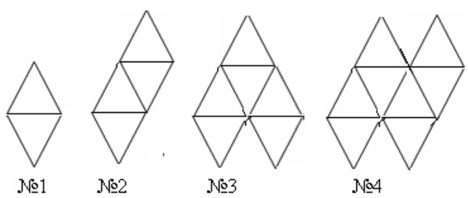
Ответ: А. 3.

Комментарий

В этой задаче опять большой разброс разных ответов, все ответы встречались очень часто. Чаще всего встречался вариант Г. Скорее всего школьники не учитывали, что разные маршруты в итоге могут удалить робота от начала на одинаковые расстояния. Ошибиться было достаточно просто, если пытаться решить задачу в уме, но можно было легко перебрать все возможные маршруты робота. Если он остановился на месте 6-го поворота, значит он поворачивал ровно 5 раз, с каждым поворотом количество маршрутов увеличивалось в 2 раза, то есть всего было 32 маршрутов (2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32), некоторые из них приводили робота в одну и ту же точку.

Задача №10

Имеется набор фигур, составленных из спичек. На рисунке показано, как следующая фигура составляется из предыдущей. Длина каждой стороны треугольника равна длине спички. Каков номер фигуры, для составления которой потребовалось 545 спичек?



А. №170. Б. №169. **В. №136.** Г. №138.

Решение

Каждая следующая фигура получается из предыдущей добавлением фигуры №1, причём одна сторона предыдущей фигуры совпадает с одной стороной добавляемой фигуры № 1. Так как фигура №1 содержит 5 спичек, то каждая последующая фигура будет содержать на 4 спички больше, чем предыдущая.

Количества спичек, необходимых для составления фигур, соответственно равны: 5, 9, 13, 17, … . Эти числа при делении на 4 дают в частном номер фигуры, а в остатке 1: $5 = 4 \cdot 1 + 1$, $9 = 4 \cdot 2 + 1$, $13 = 4 \cdot 3 + 1$, $17 = 4 \cdot 4 + 1$, … . Следовательно, чтобы найти искомый номер, нужно от заданного количества спичек — числа 545 — отнять 1 и полученную разность разделить на 4: $(545 - 1):4 = 136$.
Ответ: В. №136.

Комментарий

С задачей справились практически все участники, неправильных ответов почти не было.

8 класс

6	7	8	9	10
В	Б	Б	А	Б

Задача №6

Из конечных пунктов маршрута выехали одновременно навстречу друг другу автобус и маршрутное такси. Автобус преодолевает маршрут за 1 ч 40 мин, а маршрутное такси — за 1 ч 10 мин. Через сколько примерно минут после выезда автобус и маршрутное такси встретятся, если скорости их движения мало изменяются в пути? Выберите наиболее точное значение.

А. Через 75 мин. Б. Через 55 мин. **В. Через 40 мин.** Г. Через 30 мин.

Решение

Обозначим расстояние между конечными пунктами маршрута через s (км). Тогда средняя скорость автобуса равна $\frac{3s}{5}$ (км/ч), средняя скорость такси — $\frac{6s}{7}$ (км/ч), а средняя скорость их сближения — $\frac{3s}{5} + \frac{6s}{7} = \frac{51s}{35}$ (км/ч). Если бы их движение было равномерным, то их встреча произошла бы через $s : \frac{51s}{35} = \frac{35}{51}$ (ч) или через $\frac{35}{51} \cdot 60 \approx 41$ (мин). Но можно считать, что за промежуток времени длиной 10 мин каждый из них проходит примерно одно и то же расстояние. Поэтому из приведенных ответов наиболее подходящим является ответ В.

Ответ: В. Через 40 мин.

Комментарий

С задачей справилось большинство участников. Среди неверных ответов лидировал вариант Г. Нашлись и те, кто выбрал вариант А, хотя совершенно очевидно, что встретятся они намного раньше, чем доедут до конца маршрута, а 75 минут больше, чем время, необходимое маршрутному такси для преодоления всего расстояния.

Задача №7

Какое наименьшее количество автобусных маршрутов, соединяющих два города, каждый из которых позволяет добраться из одного города в другой и обратно, необходимо для того, чтобы из каждого из n городов можно было добраться автобусом в любой другой, сделав не более одной пересадки?

А. n. Б. n – 1. В. n – 2. Г. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Решение

Можно один из городов, например N, соединить автобусными маршрутами с остальными (n – 1) городами. Для этого понадобится n – 1 автобусный маршрут. Тогда из любого из n городов можно попасть в любой другой, сделав пересадку в городе N.

Это количество маршрутов минимально. Действительно, пусть n городов соединены n – 2 маршрутами так, что из любого города можно добраться автобусом в любой другой, сделав не более одной пересадки (даже если маршрутов было меньше, всегда можно добавить маршруты так, чтобы их было n – 2). Отбросим все города, из которых выходит только один маршрут, вместе с маршрутами, выходящими из них. Пусть таких городов k ≥ 0. Тогда осталось n – k = m городов. Так как два города не могут быть соединены маршрутами только между собой, то количества отбрасываемых городов и маршрутов одинаковы, то есть маршрутов осталось n – 2 – k = m – 2.

Из условия следует, что осталось не менее двух городов. В противном случае все отброшенные города были связаны автобусными маршрутами с оставшимися (не остаться не могло). И количество маршрутов было n – 1, а не n – 2.

Докажем методом от противного, что из любого из оставшихся городов выходит, по крайней мере, 2 маршрута. Пусть есть город X, из которого выходит только 1 маршрут в город Y. Так как мы его не выкинули, значит до этого из него выходили маршруты в какие-либо из городов, которые мы выкинули. Z_1, Z_2, … Мы уже показали, что осталось не менее двух городов, значит, есть еще какой-то город, отличный от X и Y, но тогда из этого города нельзя было добраться ни да какого из городов Z_1, Z_2, … Таким образом, получаем, что из каждого из оставшихся городов выходит не менее двух маршрутов.

Следовательно, всего маршрутов не меньше, чем m. Но по предположению их m – 2. Возникшее противоречие доказывает, что количество маршрутов не может равняться п – 2.

Ответ: Б. n – 1.

<u>Комментарий</u>

С задачей опять справилось большинство, но все неверные ответы встречались в работах. В данном случае, можно было легко проверить, что варианты А, В и Г не верны для маленького n (например, для 3). Отметим так же, что вариант Г – это наибольшее количество автобусных маршрутов между двумя городами, это число получается, если каждый город соединить маршрутом с каждым.

<u>Задача №8</u>

Эскалатор стоящего на нём человека поднимает наверх за 80 с. Если человек спускается по движущемуся вниз эскалатору, начиная движение с верхней точки, шагая вниз и не пропуская ни одной ступеньки, то спуск займет 60 с, а человек пройдет 45 ступенек. Сколько ступенек между входом и сходом неподвижного эскалатора?

А. 200. **Б. 180.** В. 150. Г. 120.

Решение

Обозначим искомое количество ступенек через x. За 80 с лента эскалатора сдвинулась на x ступенек, а за 60 с — на $60\cdot\frac{x}{80}$ ступенек. За это же время человек самостоятельно сдвинулся на 45 ступенек. Имеем уравнение: $60\cdot\frac{x}{80}$ + 45 = x или $\frac{1}{4}x = 45$. Отсюда x = 180.

Ответ: Б. 180.

Комментарий

Больше половины участников с задачей справились. Часто встречались ответы В и Г, но как они были получены не понятно, потому что все ошибки при составлении уравнения проводили либо к тому, что не существует такого положительного x (кстати, встретилась работа, где школьник отмечает, что решения не существует), либо получался не целый x, которого не было среди возможных вариантов ответа.

Задача №9

Вода в некотором водоёме пополняется равномерно из источника. Известно, что 70 коров выпили бы воду из водоёма за 40 дней, а 50 коров — за 64 дня. Каков примерно объём воды в водоёме до запуска коров в этот водоём, если считать, что корова за день выпивает 80 л воды?

А. 170 м3. Б. 17000 л. В. 1700 л. Г. 1700 м3.

Решение

Обозначим объём воды в водоёме до запуска коров в этот водоём через x (л), а через v л/день — скорость поступления воды из источника. Тогда из условия следует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x + 40v = 80 \cdot 70 \cdot 40, \\ x + 64v = 80 \cdot 50 \cdot 64. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 8, а второе — на 5 и вычтя почленно из первого уравнения второе, получим:

$3x = 80\cdot70\cdot40\cdot8 - 80\cdot50\cdot64\cdot5 = 512\,000$ (л), $x = 512\,000:3 \approx 170\,000$ (л) = 170 (м^3).

Ответ: А. ≈170 (м^3).

Комментарий

Верных ответов в этой задаче было около половины. Путаница здесь могла возникнуть только при переводе литров в м^3. Напомним, что 1 литр – это объем куба со стороной 1 дм (10 см), а 1 м^3 – это объем куба со стороной 1 м, соответственно 1 м^3 вмещает в себя 1000 кубов со стороной 1 дм (10*10*10).

Задача №10

В кинотеатре два прямоугольных зала для просмотра кинофильмов. В одном из них в каждом ряду по 38 мест, в другом – по 24 места, причём в первом зале на 168 мест больше, чем во втором. Сколько мест в двух залах вместе, если количество рядов в обоих залах более 20 и менее 40?

А. 1336. **Б. 1656.** В. 1800. Г. 2112.

Решение

Обозначим количество рядов в зале, где 38 мест в каждом ряду, через x, а количество рядов в другом зале — через y. Тогда, по условию, $38x - 24y = 168$, 20 <

$x < 40$, $20 < y < 40$. Из этого уравнения следует, что x делится на 4. Следовательно, x может принимать значения 24, 28, 32, 36. Для этих значений x полученное уравнение принимает вид:

$12y = 19 \cdot 24 - 84 = 372$, $12y = 19 \cdot 28 - 84 = 448$,

$12y = 19 \cdot 32 - 84 = 524$, $12y = 19 \cdot 36 - 84 = 600$.

Только первое и последнее уравнения имеют решения в целых числах. Но решение последнего не удовлетворяет условию $y < 40$. Следовательно, $y = 31$, $x = 24$ и в двух кинозалах $24 \cdot 38 \cdot + 31 \cdot 24 = 24 \cdot 69 = 1656$ мест

Ответ: Б. 1656 мест.

Комментарий

И снова верных ответов было около половины. Задача была достаточно сложной, поэтому скорее всего неверные ответы указывали школьники наугад, не решив задачу.

9 класс

6	7	8	9	10
А	Б	А	А	Г

Задача №6

Во сколько раз длина пути, преодолеваемого концом минутной стрелки за 16 часов, больше длины пути, преодолеваемого концом часовой стрелки, которая в 1,5 раза короче минутной?

А. В 18 раз. Б. В 16 раз. В. В 9 раз. Г. В 8 раз.

Решение

За 16 часов минутная стрелка сделала 16 оборотов. Следовательно, её конец пройдет путь, равный $16\cdot 2\pi R$, где R — длина минутной стрелки. Часовая стрелка за 16 часов сделает один оборот и, кроме того, повернётся на 120°, или на $\frac{1}{3}$ оборота. Следовательно, её конец пройдёт путь, равный $\frac{4}{3}\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{3}R = \frac{8}{9}\cdot 2\pi R$. Искомое отношение равно $16:\frac{8}{9} = 18$.

Ответ: А. В 18 раз.

Комментарий

Задачу правильно решили около половины школьников. Все неверные ответы встречались в работах примерно с одинаковой частотой. Нашлась даже работа, в которой были указаны 2 ответа – А и Г, видимо школьник не прочитал в условии, какая из стрелок длиннее в 1,5 раза (Если бы длиннее была часовая стрелка, то верным был бы ответ Г). Возможно, те, кто выбирал ответ Г тоже читали условие не внимательно.

Задача №7

Робот начинает движение в некоторой точке, в начале движения он выбирает направление перемещения. Далее робот движется прямолинейно 10 м, затем поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м, далее снова поворачивает на 90° вправо или влево и движется прямолинейно 10 м и т. д. Какое из приведенных чисел может быть приближённым расстоянием между началом и концом пути робота с точностью до 1 метра, если робот остановился на месте 6-го поворота?

А. 16 м. **Б. 31 м.** В. 44 м. Г. 58 м.

Решение

Изобразим первое перемещение робота горизонтальным отрезком. Тогда дальнейшее движение робота будет проходить по сторонам квадратной сетки, изображённой на рисунке, со стороной 10 м. Точка *O* — начало движения.

Возможные варианты расположения робота на месте 6-го поворота указаны на рисунке. Возможные расстояния от начала движения до пункта на месте 6-го

поворота могут равняться: $OA = \sqrt{2}\cdot 10 \approx 14$ (м), $OB = \sqrt{30^2+10^2} \approx 31$ (м), $OC = \sqrt{2}\cdot 30 \approx 42$ (м).
Ответ: Б. 31 м.

Комментарий

С задачей справилось чуть более половины учеников. Самым распространенным среди неверных ответов был ответ В. Во всех вариантах для разных классов этой олимпиады были различные вариации про робота, который движется по линиям сетки, и везде были затруднения с тем, чтобы представить, как именно движется робот и нарисовать все возможные маршруты. В данном случае возможных маршрутов было 32 (на каждом из 5 поворотов у робота было 2 варианта), но легко было понять, что многие варианты одинаковы с точностью до симметрии.

Задача №8

Студенческую группу горного института назовём «женской», если в ней учится более двух девушек. Сравните процент p «женских» групп в институте с процентом q девушек, обучающихся в этих группах, если известно, что в институте есть как «женские», так и «не женские» группы.

А. p < q. Б. p = q. В. p > q. Г. Сравнить нельзя.

Решение

Обозначим через x, y количество «женских» групп и количество «не женских» групп соответственно, а через a и c – количества девушек в «женских» и «не женских» группах. Тогда p = $\frac{x}{x+y}\cdot 100$, q = $\frac{a}{a+c}\cdot 100$. Из последнего равенства следует, что $\frac{1}{q}=\frac{a+c}{100a}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{c}{a}\right)$. Так как, по условию, количество девушек a в «женских» группах больше, чем 2x, а количество девушек c в «не женских» группах не больше 2y, то $\frac{1}{q}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{c}{a}\right)<\frac{1}{100}\left(1+\frac{2y}{2x}\right)=\frac{1}{100}\,\frac{x+y}{x}$. Но тогда q > $\frac{x}{x+y}\cdot 100$, то есть q > p.
Ответ: А. p < q.

Комментарий

Эта задача оказалась самой сложной в первой части олимпиады. Верно ответили всего около четверти учеников. Самый распространенный ответ в работах – Г, его выбрали около половины участников. Еще раз напомним, что ответ «сравнить нельзя» будет верным только в том случае, если существуют такие варианты разбивок студентов на группы, при которых может быть больше как p, так и q, а не в том случае, если школьнику не удалось придумать способа решить задачу.

Задача №9

В старшей группе детского сада, состоящей из 25 детей, раздали 100 конфет. Оказалось, что у мальчиков столько же конфет, сколько и у девочек. В группе нет мальчиков, у которых конфет больше, чем у Пети, и нет девочек, у которых конфет больше, чем у Маши. Какое количество конфет из приведенных не могло быть у Пети и Маши вместе?

А. 7. Б. 10. В. 14. Г. 21.

Решение

Введём следующие обозначения: m — количество мальчиков в группе, d — количество девочек в группе, x — количество конфет у Пети, y — количество конфет у Маши. По условию, $xm \geq 50$, $yd \geq 50$. Оценим общее количество конфет у Пети и Маши.

$$x + y \geq \frac{50}{m} + \frac{50}{d} = \frac{50(m+d)}{md} = \frac{50 \cdot 25}{m(25-m)}.$$

Так как произведение $m(25 - m)$ принимает наибольшее значение при равенстве сомножителей, то $x + y \geq \dfrac{50 \cdot 25}{m(25-m)} \geq \dfrac{50 \cdot 25}{12{,}5 \cdot 12{,}5} = 8$. Следовательно, у Пети и Маши вместе из приведенных не могло быть 7 конфет.

Ответ: А. 7.

Комментарий

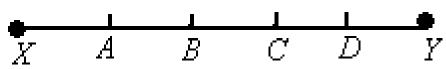
Эту задачу решило почти две третьих участников. В приведенном решении дается оценка снизу, какое минимальное количество конфет должно быть у Пети и Маши, из которой сразу следует, что верный ответ А, но стоит отметить, что если бы эта задача была без вариантов ответа, требовалось бы не только доказать, что у детей не могло быть ровно 7 конфет, но и привести примеры, либо по другому обосновать, что все другие количества конфет у них могли быть.

Задача №10

Расстояние между городами X и Y равно 240 км. В 8 часов утра из города X выехал автобус, прибывший в город Y в 13 часов. Каждый раз через один и тот же промежуток времени автобус делал остановку длительностью 15 мин. Всего автобус сделал 4 остановки. Одновременно с автобусом из города X в город Y выехало такси, которое, возвращаясь обратно после доставки пассажиров в город Y, встретило автобус на расстоянии 90 км от города Y. Какова примерно средняя скорость движения такси, если считать, что автобус и такси двигались практически равномерно? Выберите наиболее точное значение. .

А. 90 км/ч. Б. 94 км/ч. В. 98 км/ч. Г. 102 км/ч.

Решение



Пусть A, B, C, D — обозначения остановок на пути из X в Y (см. рис.). Из условия следует, что средняя скорость автобуса равна 240:4 = 60 (км/ч) и $XA = AB = BC = CD = DY = \dfrac{240}{5} = 48$ (км).

Встреча автобуса и такси произошла на расстоянии 90 км от города Y, то есть между C и D. К моменту встречи такси проехало 240 + 90 = 330 (км). От момента выезда автобуса до момента встречи с такси прошло (240 – 90): 60 + $\frac{3}{4}$ = $\frac{13}{4}$ (ч). Средняя скорость такси равна $330 : \frac{13}{4} \approx 102$ (км/ч).

Ответ: Г. 102 км/ч.

Комментарий

Эту задачу верно решили около половины учеников. Самым распространенным среди неправильных ответов был вариант А, но скорее всего этот ответ был получен наугад.

ЗНАНИКА