Волшебный сундучок

Всероссийский математический конкурс

Разбор задач третьей части заданий

4 класс

6	7	8	9	10
А	В	А	В	Г

<u>Задача №6</u>

Внутри туннеля через каждые 10 м расположены контрольные пункты. Робот движется вдоль туннеля, начиная свое движение от контрольного пункта, расположенного в средине туннеля. Через каждые 10 м он останавливается и принимает решение — двигаться вперёд или назад. Робот не выходил из туннеля. В скольких различных пунктах робот может оказаться сразу после 5-й остановки?

А. В 6-и. Б. В 5-и. В. В 4-х. Г. В 3-х.

Решение

Выберем один из входов в туннель в качестве начала пути. Будем называть движение в направлении от этого начала до конца туннеля движением вперёд, а движение в противоположном направлении — движением назад. После 5-й остановки может оказаться, что робот 5 раз двигался вперёд и ни разу назад, или 4 раза вперёд и 1 раз назад, или трижды вперёд и дважды назад, или дважды вперёд и трижды назад, или 1 раз вперёд и 4 раза назад, или все 5 раз назад. Так как движение он начал из средины туннеля, то после 5-й остановки он может оказаться в 6 пунктах.

Ответ: А. В 6-и.

<u>Комментарий</u>

С задачей справились больше половины участников.

Среди ответов участников встречались все предложенные варианты, но особенно хочется отметить тех учеников, которые написали, что все варианты верны. Обычно в вопросах подобных этому: «В скольких различных пунктах?» подразумевается «Каково максимальное количество различных пунктов, в которых мог оказаться робот?», но, возможно, для школьников младших классов это не очевидно, поэтому они по другому трактовали поставленный вопрос. Действительно, робот мог побывать и в 5-ти, и в 4-х, и только в 3-х разных пунктах, но если уж выходить за рамки предложенных ответов, то стоило написать, что он мог побывать в любом количестве пунктов от 2-х до 6-ти и привезти все примеры, этого не сделал никто из учеников.

<u>Задача №7</u>

По мнению экспертов, масса травы на лугу в некоторый день составляет примерно 64 т. Корова за день съедает 30 кг травы, на этом лугу за день вырастает примерно 500 кг травы. Какова примерно масса травы на этом лугу после выпаса 40 коров в течение 10 дней?

А. 52 т. Б. 55 т. **В. 57 т.** Г. 60 т.

Решение

За 10 дней 40 коров съедят 30·10·40 = 12 000 (кг), или 12 (т) травы. Если бы на этом лугу не было выпаса коров, то за 10 дней на лугу дополнительно к 64 т выросло бы 500·10 = 5 000 (кг), или 5 (т) травы. Через 10 дней после выпаса 40 коров на лугу останется (64 + 5) – 12 = 57 (т) травы.

Ответ: В. 57 т.

Комментарий

Большая часть учеников с задачей справилась, никакого подвоха здесь не было, нужно было просто внимательно все посчитать.

Задача №8

По окружности расположено 23 кружочка, занумерованных числами 1, 2, …, 23. Будем закрашивать кружочки, начиная с кружочка с номером 2, через один незакрашенный кружочек (кружочки с номерами 2, 4, 6, …) до тех пор, пока останется один незакрашенный. Каков его номер?

А. 15. Б. 17. В. 21. Г. 23.

Решение

Если кружочков было бы 2, 4, 8, 16, то незакрашенным остался бы кружочек с номером 1. Это следует из того, что при каждом прохождении окружности количество незакрашенных кружочков уменьшается вдвое и оставшиеся кружочки разбиваются на пары. Так как в паре закрашивается второй кружочек, то кружочек с номером 1 никогда не будет закрашен.

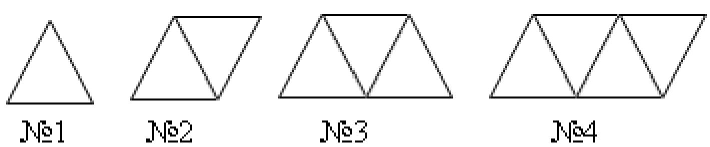
Так как 23 = 16 + 7, то после 7 зачёркнутых кружочков (их номера 2, 4, …, 14) вдоль окружности останется 16 кружочков и первым при продолжении закрашивания будет кружочек с номером 15 (он не закрашивается). Он и останется последним незакрашенным.

Ответ: А. 15.

Комментарий

Почему то в этой задаче было очень мало правильных ответов, а большинство школьников выбирали вариант г). Видимо, они пытались угадать правильный ответ или в уме представить, как закрашиваются кружочки. А проверить свои рассуждения в этой задаче было очень просто – нарисовать картинку и внимательно закрашивать кружочки. Даже терпением запасаться бы не пришлось, при 23 кружочках можно было уложиться в пару минут.

Задача №9



Имеется набор фигур, составленных из спичек. Длина каждой стороны треугольника равна длине спички. На рисунке показано, как следующая фигура составляется из предыдущей. Сколько спичек потребовалось для составления 100-й фигуры?

А. 301. Б. 251. **В. 201.** Г. 200.

Решение

Каждая следующая фигура получается из предыдущей добавлением фигуры №1, причём одна сторона предыдущей фигуры совпадает с одной стороной добавляемой фигуры № 1. Так как фигура №1 содержит 3 спички, то каждая последующая фигура будет содержать на 2 спички больше, чем предыдущая. Количества спичек, необходимых для составления фигур, соответственно равны: 3, 5, 7, 9, … Эти числа нечётные, при делении на 2 они дают в частном номер фигуры, а в остатке 1: $3 = 2\cdot1 + 1$; $5 = 2\cdot2 + 1$; $7 = 2\cdot3 + 1$; $9 = 2\cdot4 + 1$; … Для 100-й фигуры требуется $2\cdot100 + 1 = 201$ спичка.

Ответ: В. 201.

Комментарий

Задачу решили почти все школьники, лишь в некоторых работах встречался вариант 200 спичек. Видимо, закономерность, что с каждым новым треугольником добавляется 2 новых спички, ученики поняли, но по невнимательности забыли добавить 1.

Задача №10

Из кубиков с ребром 1 см сложен куб с ребром 8 см. Затем сняли кубики, образующие три грани, имеющие общую вершину. Сколько всего сняли кубиков?

А. 216. Б. 192. В. 176. Г. 169.

Решение

Данный куб состоит из $8\cdot8\cdot8 = 512$ кубиков с ребром 1 см. Кубиков, образующих одну грань, $8\cdot8 = 64$. Среди них 8 кубиков одной из соседних граней. Когда сняли эти две грани, то всего сняли $64 + (64 – 8) = 120$ кубиков. На третьей грани, имеющих с ними общую вершину, осталось $7\cdot7 = 49$ кубиков. Всего будет снято $120 + 49 = 169$ кубиков.

Ответ: Г. 169.

Комментарий

Еще одна сложная задача, которая требовала некоторого пространственного мышления. Все ответы встречались в работах примерно поровну, по всей видимости, ученики пытались угадать ответ. Вместо этого, можно было представить, что получится, если убрать из куба 3 грани, имеющие общую вершину. А получался тоже куб, только со стороной на 1 меньшей, чем изначальный. То есть, мы убрали число кубиков равное разности между количеством кубиков в изначальном большом кубе и получившемся кубе поменьше, что равно $8\cdot8\cdot8 - 7\cdot7\cdot7 = 512 – 343 = 169$. Если возникали сложности с тем, чтобы представить какие-то изменения с кубом со стороной 8, можно было взять кубик поменьше и понять, как он видоизменится, если убрать грани, а потом уже этот принцип применить на куб побольше.

5 класс

6	7	8	9	10
В	Б	Б	Б	Нет

<u>Задача №6</u>

По мнению экспертов, масса травы на лугу в некоторый день составляет примерно 64 т. Корова за день съедает 30 кг травы, на лугу за день вырастает примерно 500 кг травы. Какую примерно массу будет иметь трава, оставшаяся на этом лугу после выпаса на нём 40 коров в течение 15 дней?

А. 49 т. Б. 51 т. 500 кг **В. 53 т. 500 кг.** Г. 55 т.

Решение

За 15 дней 40 коров съедят 30·15·40 = 18 000 (кг), или 18 (т) травы. Если бы на этом лугу не было выпаса коров, то за 15 дней на лугу дополнительно к 64 т выросло бы 500·15 = 7 500 (кг), или 7 т 500 кг травы. Через 15 дней после выпаса 40 коров на лугу останется (64 000 + 7 500) – 18 000 = 53 т 500 кг травы.

Ответ: В. 53 т. 500 кг.

<u>Комментарий</u>

Большая часть учеников с задачей справилась, никакого подвоха здесь не было, нужно было просто внимательно все посчитать.

<u>Задача №7</u>

По окружности расположено 78 кружочков, занумерованных числами 1, 2, …, 78. Будем закрашивать кружочки, начиная с кружочка с номером 2, через один незакрашенный кружочек (кружочки с номерами 2, 4, 6, …) до тех пор, пока останется один незакрашенный. Каков его номер?

А. 28. **Б. 29.** В. 50. Г. 51.

Решение

Если кружочков было бы 2, 4, 8, 16, 32, 64, то незакрашенным остался бы кружочек с номером 1. Это следует из того, что при каждом прохождении окружности количество незакрашенных кружочков уменьшается вдвое и оставшиеся кружочки разбиваются на пары. Так как в паре закрашивается второй кружочек, то кружочек с номером 1 никогда не будет закрашен.

Так как 78 = 64 + 14, то после 14 зачёркнутых кружочков (их номера 2, 4, …, 28) вдоль окружности останется 64 кружочка и первым при продолжении вычёркивания будем считать кружочек с номером 29. Он и останется последним.

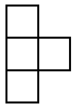
Ответ: Б. 29.

<u>Комментарий</u>

С этой задачей тоже справилось большинство участников, но, как показывают работы школьников старших классов, где похожая задача была в части 2, никто почти не додумался до того изящного решения, которое приведено выше. В основном школьники просто выписывали номера кружочков, оставшихся после закрашивания каждого круга, при 78 кружочках такое методичное вычеркивание ничем не хуже, если сделано аккуратно.

Задача №8

Из фигурок, имеющих вид, изображённый на рисунке, необходимо составить квадраты различных размеров. Квадрат каких из указанных размеров нельзя составить?



А. 4×4 клетки. **Б. 6×6 клеток.** В. 8×8 клеток. Г. 16×16 клеток.

Решение

Как сложить квадрат размером 4×4 клетки из указанных фигурок, показано на рис. 1.

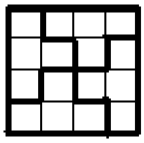


Рис. 1

Из четырёх таких квадратов можно сложить квадрат размером 8×8 клеток, а из 16 — размером 16×16 клеток. Используя приведенное выше построение квадрата 4×4 из фигурок данного вида для каждого из таких квадратов, получим квадраты 8×8 и 16×16 клеток, сложенные из фигурок данного вида.

Квадрат размером 6×6 клеток сложить из фигурок данного вида нельзя. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить две фигурки заданного вида так, как это показано на рис. 2. Из него видно, что две нижние полосы мы не сможем закрыть. Расположение двух первых фигур однозначно с точностью до симметрии.

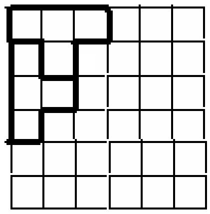


Рис. 2

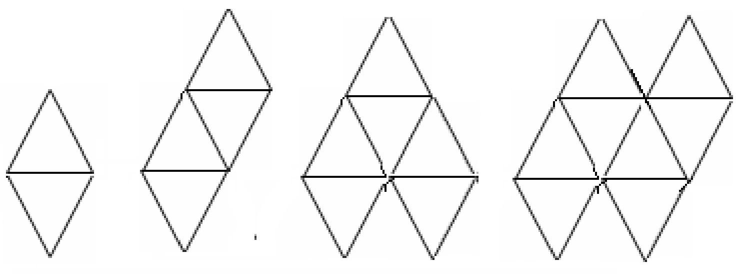
Ответ: Б. 6×6 клеток.

Комментарий

Неправильных ответов в этой задаче было мало, среди них чаще всего встречался ответ Г, что странно, потому что квадрат 16х16 составляется из 4-х квадратов 8х8, а каждый из них в свою очередь из 4-х квадратов 4х4, поэтому если мы можем из указанных фигурок сложить квадрат 4х4, то и 8х8, и 16х16 с легкостью сложим.

Задача №9

Имеется набор фигур, составленных из спичек. Длина каждой стороны треугольника равна длине спички. На рисунках показано, как следующая фигура составляется из предыдущей. Сколько спичек потребовалось для составления 100-й фигуры?



А. 400. **Б. 401.** В. 451. Г. 500.

Решение

Каждая следующая фигура получается из предыдущей добавлением фигуры №1, причём одна сторона предыдущей фигуры совпадает с одной стороной добавляемой фигуры № 1. Так как фигура №1 содержит 5 спичек, то каждая последующая фигура будет содержать на 4 спички больше, чем предыдущая. Количества спичек, необходимых для составления фигур, соответственно равны: 5, 9, 13, 17, … Эти числа при делении на 4 дают в частном номер фигуры, а в остатке 1: $5 = 4 \cdot 1 + 1$, $9 = 4 \cdot 2 + 1$, $13 = 4 \cdot 3 + 1$, $17 = 4 \cdot 4 + 1$, … Для 100-й фигуры требуется $4 \cdot 100 + 1 = 401$ спичка.

Ответ: Б. 401.

Комментарий

И снова большинство ответов верные, но в работах так же встречались варианты А (видимо школьники поняли закономерность, что с каждой новой фигурой прибавляется 4 спички, но забыли прибавить 1) и Г (скорее всего из-за того, что в изначальной фигуре 5 спичек, то есть в 100 фигурах 500, но это, конечно же, не верно, так как новые фигуры достраиваются к предыдущим и у них общие спички).

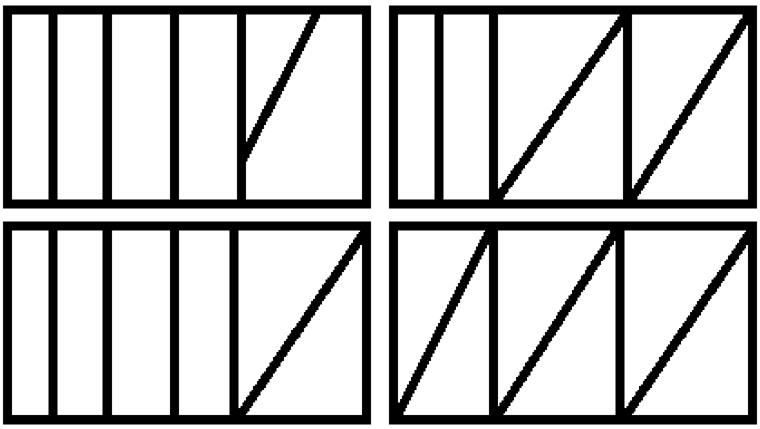
Задача №10

Прямоугольный лист бумаги разрезали по прямой на две части. Затем одну из них разрезали снова по прямой на две части и т. д. Какое из приведенных чисел не может быть количеством уголков всех полученных частей после 5 таких операций, если хотя бы одна часть имеет треугольную форму?

А. 18. Б. 20. В. 22. Г. 24.

Решение

Правильного ответа нет среди приведенных. Примеры разрезания для всех вариантов ответа изображены на рисунке.



Ответ: Нет правильного варианта.

Комментарий

Эта задача оказалась самой сложной в тестовой части. Чаще всего школьники выбирали вариант Г. Видимо они либо получали примеры для 18, 20 и 22 уголков и на этом останавливались, считая, что верный ответ обязательно должен быть среди предложенных, либо не догадывались до того, что четырехугольник можно разрезать не только на 2 треугольника или 2 четырехугольника, но и на треугольник и пятиугольник. Такое разрезание прибавляет 4 угла и обеспечивает наличие треугольной части.

6 класс

6	7	8	9	10
А	Б	В	В	В

<u>Задача №6</u>

Двадцать учеников из пяти различных классов собрали гербарий из 30 растений. Ученики одного класса принесли по одинаковому числу растений, а из разных – по разному числу. Сколько учеников принесли по три растения, если каждый принёс хотя бы одно растение?

А. 1. Б. 2. В. 3. Г. Определить невозможно.

Решение

Если взять по одному ученику из каждого класса (их будет 5), то всего они принесли, по крайней мере, 15 растений (1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15). Следовательно, оставшиеся не более 30 – 15 = 15 растений принесли остальные 20 – 5 = 15 учеников. Так как каждый ученик принёс хотя бы одно растение, то осталось ровно 15 растений и каждый из 15 учеников принёс ровно по одному растению. Таким образом, три растения принёс один ученик.

Ответ: А. 1.

<u>Комментарий</u>

Задача оказалось сложной. Чаще всего школьниками выбирался вариант Г. Скорее всего им самим просто не удалось определить количество, но это вовсе не обозначает, что однозначного ответа нет. Стоит отметить, что этот вариант был бы правильным только в том случае, если бы можно было придумать хотя бы 2 разных расклада, в которых школьники принесли бы по 3 растения. Например, если бы всего растений было собрано 32, а не 30, то вариантов было бы 2 (15 по 1, 1 по 2, 2 по 3, 1 по 4, 1 по 5) либо (14 по 1, 3 по 2, 1 по 3, 1 по 4, 1 по 5).

<u>Задача №7</u>

Количество точек пересечения сторон двух квадратов, ни одна из вершин одного из них не лежит на стороне другого, не может равняться …

А. 2 . **Б. 3.** В. 4. Г. 6.

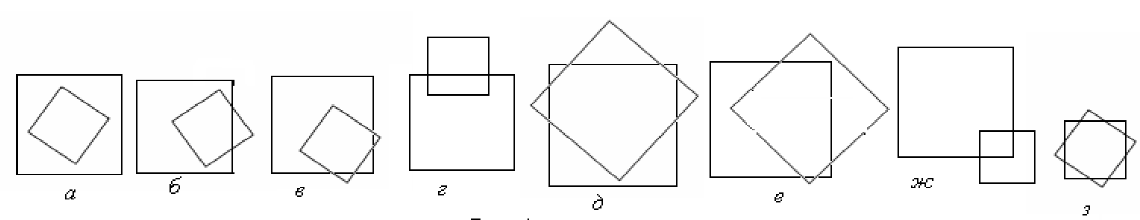


Рис. 1

Решение

Из рис. 1 видно, что количество точек пересечения сторон двух квадратов, ни одна из вершин одного не лежит на стороне другого, может равняться 0, 2, 4, 6, 8.

Чётность количества точек пересечения сторон двух квадратов, ни одна из вершин одного из них не лежит на стороне другого, может быть обоснована такими рассуждениями.

Если один квадрат содержит все 4 вершины другого, то точек пересечения сторон нет, их количество равно нулю (рис. 1, а).

Если один квадрат содержит ровно три вершины другого, то количество точек пересечения сторон квадрата равно 2 (рис. 1, б).

Если один квадрат содержит ровно две вершины другого, то количество точек пересечения сторон квадрата равно или 4 (рис. 1, в), или 2 (рис. 1, г).

Если один квадрат содержит ровно одну вершину другого, то количество точек пересечения сторон квадрата равно или 6 (рис. 1, д), или 4 (рис. 1, е), или 2 (рис. 1, ж) .

Если один квадрат не содержит ни одной вершины другого квадрата, то количество точек пересечения может равняться 8, 6, 4, 2, 0 (рис. 2).

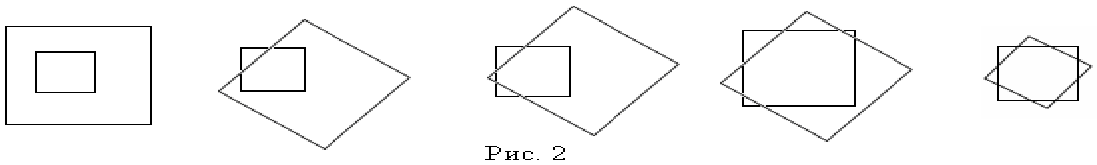


Рис. 2

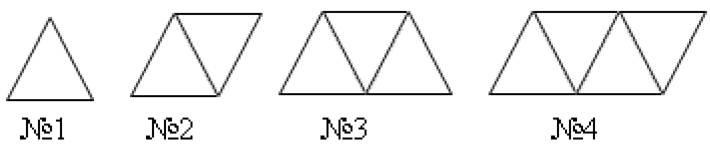
Ответ: Б. 3.

Комментарий

Так как эта задача не требовала развернутого ответа, здесь даже не нужно было находить все возможные варианты количества точек пересечения, достаточно было подобрать картинки для 2, 4 и 6 точек, чтобы понять, что остается только один подходящий вариант, а с этим большинство учеников справилось.

Задача №8

Имеется набор фигур, составленных из спичек (см. рис.). Длина каждой стороны треугольника равна длине спички. Каждая следующая фигура получается из предыдущей, как показано на рисунке. Каков номер фигуры, для составления которой понадобилось 297 спичек?



А. №221. Б. №220. **В. №148.** Г. №145.

Решение

Каждая следующая фигура получается из предыдущей добавлением фигуры №1, причём одна сторона предыдущей фигуры совпадает с одной стороной добавляемой фигуры № 1. Так как фигура №1 содержит 3 спички, то каждая последующая фигура будет содержать на 2 спички больше, чем предыдущая. Количества спичек, необходимых для составления фигур, соответственно равны: 3, 5, 7, 9, … Эти числа нечётные, то есть при делении на 2 дают в частном номер фигуры, а в остатке 1: $3 = 2\cdot1 + 1$, $5 = 2\cdot2 + 1$, $7 = 2\cdot3 + 1$, $9 = 2\cdot4 + 1$, … Следовательно, чтобы найти искомый номер, нужно от заданного количества спичек — числа 297 — отнять 1 и полученную разность разделить на 2: $(297 - 1):2 = 148$.

Ответ: В. №148.

Комментарий

И снова с задачей справились почти все ученики. На примере таких легких задач школьникам можно объяснить основные принципы индукции, которые в будущем помогут научиться решать более сложные задачи.

Задача №9

Для полёта в космос нужно укомплектовать экипаж из трёх человек. Командир корабля может быть выбран из четырёх космонавтов, а два его помощника — из пяти бортинженеров. Сколькими способами можно укомплектовать этот экипаж?

А. 100. Б. 80. В. 40. Г. 24.

Решение

Командира корабля можно выбрать 4-мя способами. Одного из его помощников можно выбрать из 5-и бортинженеров, другого — из 4-х оставшихся. Так как в условии помощники не различаются, то двух помощников можно выбрать $5\cdot4:2 = 10$ способами. Итак, для каждого способа выбора командира есть 10 способов выбора его двух помощников. Поэтому количество способов выбора экипажа равно $4\cdot10 = 40$.

Ответ: В. 40.

Комментарий

Правильно решили задачу около половины всех участников. Самым распространенным вариантом среди неправильных был вариант Б. Этот ответ стал бы верным, если бы помощники как то различались (например, один был главным). Школьники верно поняли, что количество вариантов экипажа получается путем умножения количеств вариантов выбора людей на каждую должность, но не догадались, что нужно еще поделить на 2, потому что каждый вариант мы посчитали ровно 2 раза (Выбрать сначала Петю, а потом Васю – это то же самое, что и выбрать сначала Васю, а потом Петю).

Задача №10

Антон и Маша живут в высотном доме с одним подъездом, в котором на каждом этаже 10 квартир. Номер этажа Антона равен номеру квартиры Маши. Сумма номеров их квартир равна 239. На каком этаже живёт Антон?

А. На 20-м. Б. На 21-м. В. На 22-м. Г. На 23-м.

Решение

Обозначим номер этажа, на котором живёт Антон, через x. Тогда номер квартиры Антона равен $10(x – 1) + y$, где $y = 1, 2, \ldots, 10$. По условию, $10(x – 1) + y + x = 239$, или $11x + y = 249$. Это равенство означает, что y является остатком от деления числа 249 на 11, а x — неполное частное, $x = 22$.

Ответ: В. На 22-м.

Комментарий

Около половины участников с задачей справились. Остальные выбирали варианты Б и Г. Получить вариант Б можно было бы, решив, что квартира 218 находится на 21 этаже. (При проверке получаем, что если бы Антон жил на 21-м этаже, то номер квартиры Маши был бы 21, а самого Антона 239 – 21 = 218). На самом деле квартира 218 находится конечно же на 22 этаже. Подставив аналогично все остальные варианты, можно было даже без составления уравнения убедиться, что подходит только вариант В.