ЗОЛОТОЙ КЛЮЧИК

ВСЕРОССИЙСКИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОНКУРС

ЗНАНИКА

Электронная школа
www.znanika.ru

Разбор задач пятой части заданий

4-5 класс

Общий комментарий:

Многие участники не написали в некоторых задачах никакого решения, обоснования, почему приведенный ими ответ верен. А иногда было приведено какое-то необъясненное вычисление, о котором было неясно, что оно значит и почему это решение (даже если оно давало верный ответ). В случае такого подхода оценка за задачу снижалась. Если же ответ при этом был неверен, то участник сам себе снижал шанс того, что ему укажут на конкретную его ошибку. Другая типичная ошибка – невнимательно прочитать, а потому не понять условие.

Бывали списанные решения учащихся одной и той же школы. В таких случаях люди часто переписывали у друг друга даже ошибки.

Задача №6

В некотором селении живёт 300 семей. Треть семей имеет и кошку, и собаку; треть — или кошку, или собаку; а у трети нет ни кошки, ни собаки. Сколько указанных домашних животных в селении?

Решение:

Если каждая семья из трети семей, имеющих и кошку, и собаку, передаст по одному своему животному в семьи, не имеющих ни кошки, ни собаки, то в каждой семье селения будет или по одной кошке, или по одной собаке. Следовательно, в селении 300 указанных домашних животных.

Ответ. 300.

Комментарий:

Почти все написанные людьми решения верные. Пример ошибки: перепутать условия «ровно одно животное» и «не менее одного животного» или даже «пол-животного» - тогда ответ получается, конечно, неверный.

Задача №7

В некоторой фирме имеется директор фирмы, его заместитель, начальники трёх отделов, их заместители и рядовые сотрудники отделов. Известно, что тех, у кого есть начальник, в 5 раз больше, чем начальников. Сколько в фирме рядовых сотрудников, если рядовые сотрудники подчиняются директору, его заместителям, начальникам всех отделов и их заместителям?

Решение:

Количество начальников, то есть тех, кому кто-то подчиняется, равно 8. Тогда количество людей, им подчиняющихся, равно $8 \cdot 5 = 40$. Это количество состоит из семи руководителей (всех начальников, кроме директора фирмы) и рядовых сотрудников. Следовательно, количество рядовых сотрудников равно $40 – 7 = 33$.

Ответ. 33.

Комментарий:

Большинство написанных решений верны. Типичная ошибка такая: из 40 людей, подчиняющихся хоть кому-то, забывали вычесть сотрудников «среднего звена»: которые кому-то подчиняются и кому подчинен хоть кто-то еще. Иногда при этом еще забывали учесть в вычислениях наличие директора или его заместителя.

<u>Задача №8</u>

За круглым столом сидит 31 участник дискуссии. Женщины не сидят рядом. У каждого мужчины, по крайней мере, один сосед — мужчина. Какое наибольшее количество женщин могло быть за круглым столом?

Решение:

Так как соседями каждой женщины являются мужчины, то женщин не более 11. Однако, так как у каждого мужчины, по крайней мере, один сосед — мужчина, то женщин ровно 10 (см. рис.).

$$\underbrace{\text{МЖМ}}_{1}\ \underbrace{\text{МЖМ}}_{2}\ \ldots\ \underbrace{\text{МЖМ}}_{10}\ \text{М}$$

Комментарий:

Почти все написанные решения или хотя бы ответы верны. Оценка за задачу снижалась, если ответ не пояснялся хотя бы примером. Это признак того, что человек, скорее всего, списал ответ.

<u>Задача №9</u>

Квадратная клумба в парке засажена розами. Расстояние между кустами в ряду равно 80 см, а между рядами — 1 м 20 см. Сколько кустов роз на клумбе, если в каждом ряду 18 кустов?

Решение:

Длина стороны клумбы не менее 80·17 = 1360 см. Так как число 1360 при делении на 120 (120 см — расстояние между рядами) даёт в неполном частном число 11 и в остатке 40, то на клумбе не более 12 рядов. Следовательно, на участке не более 18·12 = 216 кустов роз.

Ответ. Не более 216 кустов.

Комментарий:

Почти все написанные решения верны. Наиболее распространенная ошибка – ошибка в каком-нибудь умножении. Важно еще было учитывать то, что количество рядов это не просто длина стороны квадрата делить на расстояние между рядами, а к этому еще надо прибавить единицу!

<u>Задача №10</u>

Какое наибольшее количество квадратов различных размеров можно получить из квадратиков одинаковых размеров, используя их все, если их количество равно: 1) 59; 2) 145?

Решение:

В качестве единицы измерения длин примем длину стороны квадратика. Тогда длины сторон составляемых квадратов будут выражаться натуральными числами.

1) Если из данных квадратиков сложить квадраты различных размеров, то сумма квадратов длин их сторон должна равняться 59. Следовательно, нужно найти наибольшее количество различных натуральных чисел, сумма квадратов которых равна 59. Нетрудно заметить, что $1^2 + 3^2 + 7^2 = 59$. Следовательно, три квадрата различных размеров можно сложить. А четыре нельзя. Очевидно, что длины сторон составляемых квадратов не превосходят 7. Поэтому задача сводится к возможности представления числа 59 в виде суммы четырёх слагаемых, которые могут равняться числам 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. Перебором убеждаемся, что такое представление невозможно.

2) Аналогично рассуждая, получим, что из 145 квадратиков одинаковых размеров можно составить 5 квадратов различных размеров, так как $145 = 64 + 36 + 25 + 16 + 4$. Хотя $145 = 81 + 25 + 25 + 9 + 4 + 1$, но в этом представлении не все слагаемые различны.

Число 145 нельзя представить в виде суммы более 5 различных квадратов натуральных чисел. Если в качестве наибольшего слагаемого взять числа 144, 121, 100. 81, то суммы оставшихся слагаемых $145 – 144 = 1$, $145 – 121 = 24$, $145 – 100 = 45$, $145 – 81 = 64$ нельзя представить в виде суммы более 4 различных квадратов натуральных чисел. Для 1 и 24 это очевидно. Так как $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$, то это справедливо и для 45. Перебором легко приходим к выводу, что это верно и для числа 64.

Ответ. 1) 3; 2) 5.

Комментарий:

Эту задачу верно решили немногие. Типичные ошибки: не заметили условие, что составленные квадраты должны быть различными, пропустили в ряду квадратов 1, 4,9, 16, 25, 36, … какие-нибудь числа, не заметили условие, что все квадратики должны быть использованы не более одного раза, не заметили условие, что должны быть использованы все квадратики, неверно подобрали пример.

6-7 класс

Задача №6

На занятие кружка по математике пришло 11 учеников. Во время занятия каждый из них решил 3 задачи из предложенных. Известно, что для любых двух кружковцев есть задача, которую один из них решил, а другой нет. Сколько задач было предложено?

Решение:

Так как каждый ученик решил 3 задачи и для любых двух кружковцев есть хотя бы одна задача, которую один из них решил, а другой нет, то задача сводится к нахождению количества различных наборов по 3 задачи из предложенных. Если предложено 5 задач, то это количество равно $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6}=10$. Этот результат можно получить следующими рассуждениями. В качестве первой задачи можно взять любую из 5, для любой выбранной первой задачи есть 4 возможности для выбора второй, третью задачу можно выбрать из 4 оставшихся, при этом любые три задачи окажутся выбранными столько раз, сколькими способами их можно переставить, то есть 6 раз. Следовательно, при 5 задачах могло быть не более 10 учащихся, а по условию, их 11. Количество различных наборов по 3 задачи из 6 равно $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}=20$. Следовательно, для 6 задач и более требования выполняются (20 > 11).

Ответ. Не менее 6 задач.

Комментарий:

Распространенный пример ошибки: делается безосновательное предположение о том, что условие означает, что общая решенная задача всегда одна и та же (из чего получается некоторый далеко не минимальный ответ). Другой пример: в процессе решения выбирается некоторый пример соответствия учеников и решенных задач и объявляется единственным возможным (так ведь можно прийти к неверному ответу!).

Задача №7

В одном 20-этажном доме лифт испорчен так, что на нем можно только либо подняться на 8 этажей вверх, либо опуститься на 11 этажей вниз (если вверх или вниз осталось соответственно меньше этажей, то лифт в этом направлении не движется). На какие этажи можно добраться на этом лифте с первого этажа?

Решение:

Согласно условию, с первого этажа можно попасть на следующие этажи: 9, 18, 7, 15, 4, 12, 20. А с 20-го этажа можно попасть на следующие этажи: 9, 17, 6, 14, 3, 11, 19, 8, 16, 5, 13, 2, 10, 18, 7, 15, 4, 12. Таким образом, на этом лифте с первого этажа можно добраться на любой этаж.

Ответ. На все.

Комментарий:

Самая главная ошибка здесь была в том, чтобы привести ответ без каких-либо обоснований. Если так делать, то будет неясно, в чем ошибка, если ответ неверен. Записывание обоснований очень полезно!

Задача №8

Группа школьников весит 510 кг, при этом каждый из них весит не более 60 кг. Какое наименьшее количество вызовов нужно сделать, чтобы поднять всех школьников с 1-го этажа на 10-й этаж, если грузоподъёмность лифта не превышает 200 кг?

Решение:

За один подъём можно гарантированно поднять не менее 141 кг, так как, если масса школьников, находящихся в лифте, не больше 140 кг, то лифт может принять ещё одного ученика. Поэтому за 4 подъёма можно поднять всех школьников,

За три подъёма это можно сделать не всегда. Например, если школьников 10, и масса каждого равна 51 кг, то этого сделать нельзя: за один подъём можно поднять только троих.

Ответ. 4.

Комментарий:

Пример ошибки: не понять, что можно отправлять школьников не по трое, потому что не каждый весит по 60 кг (сумма-то масс 510кг). Ошибки в общем и целом были про то, что «каждый весит по 60». Другой тип ошибки: «в каждый раз МОЖНО загрузить ровно 200 кило школьников» - нет и еще раз нет, их туда отправляют только живыми и целыми!

Задача №9

Цепочка состоит из 30 цельных колечек, каждое из которых соединено с двумя другими и наружный диаметр которых 2,2 мм, а внутренний 2 мм. Может ли эту цепочку одеть на шею человек, обхват головы которого 55 см?

Решение:

В условие задачи закралась ошибка, вместо мм в диаметре звена должны были быть см. Тогда решение было бы следующим. Длина растянутой цепочки равна сумме длин 30 отрезков по 1,6 см и 30 отрезков по 0,4 см. Эта сумма равна $30 \cdot 1{,}6 + 30 \cdot 0{,}4 = 30 \cdot (1{,}6 + 0{,}4) = 30 \cdot 2 = 60$ см, следовательно, человек с обхватом головы 55 см сможет надеть цепочку. Если решать задачу в предложенном виде, то длина цепочки равна 60 мм, то есть 6 см, то есть человек надеть цепочку не сможет. В данном случае было важно обратить внимание на единицы измерения.

Ответ. Не может.

Комментарий:

Самая распространенная ошибка: человек путался в том, что именно он вычисляет, что из чего вычитает и что при этом получается. Если разность двух величин в какой-то жизненной задаче оказывается отрицательна, то у этого тоже есть свой смысл (обычно это означает нехватку чего-то)!

Задача №10

Вдоль дороги расположены посты на различных расстояниях друг от друга. Можно ли, не зная эти расстояния, указать пост, на котором следует провести совещание старших дежурных этих постов, проехав вместе наименьшее расстояние, если постов: 1) пять; 2) шесть?

Решение:

1) Изобразим расположение постов на рис. 1 точками P_1, …, P_5. Где бы ни проходило совещание, представители постов P_1 и P_5 вместе проедут расстояние, равное расстоянию между этими постами. Представители постов P_2 и P_4 вместе проедут расстояние, не меньшее расстояния между постами P_2 и P_4.

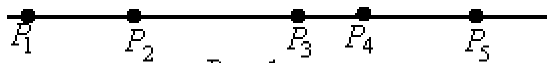


Рис. 1

Если совещание пройдёт не на посту P_3, то представитель этого поста проедет отличное от нуля расстояние. Следовательно, если совещание будет проходить на посту P_3, то вместе представители всех пяти постов проедут наименьшее расстояние, равное сумме расстояний от P_1 до P_5 и от P_2 до P_4.

2) Если постов 6 (см. рис. 2), то, рассуждая, как и выше, придём к выводу, что при сборе как на P_3 так и наP_4, представителями всех постов будет преодолено одно и то же наименьшее расстояние.

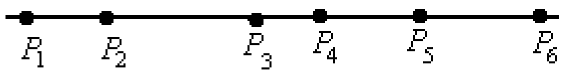


Рис. 2

Ответ. 1) Можно; 2) можно.

Комментарий:

Очень многие написали какой-то ответ (обычно неверный для пункта (б)) и не написали никакого разумно выглядящего обоснования.

8-9 класс

Задача №6

В некотором банке имеется автомат, разменивающий любую банкноту на 4 банкноты (или 4 монеты) меньшего достоинства. Можно ли в этом автомате разменять банкноту достоинством в 5000 руб. на сторублёвые банкноты?

Решение:

Каждый размен увеличивает количество банкнот (или банкнот и монет) на 3. По условию, из банкноты в 5000 руб. нужно получить 50 сторублёвых банкнот, то есть увеличить количество банкнот на 50 – 1 = 49. Так как число 49 на 3 не делится, то указанный размен невозможен.

Ответ. Нет.

Комментарий:

В такого типа задачах, где в процессе нечто делится на N частей, многие постоянно забывают, что число частей не увеличивается в N раз, а увеличивается на N-1 штук. Это весьма стандартная ошибка: ведь при размене получается 1, потом 4, потом 7, потом 10, потом 13, потом 16, потом 19 купюр итд (Т.е. делимость на 4 наблюдается, как видно, редко).

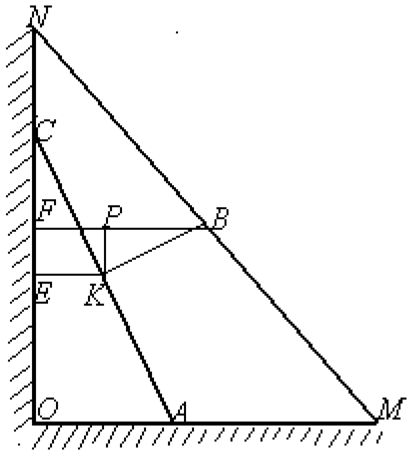
Задача №7

К стене дома приставлена большая лестница. Под ней поставили к стене маленькую лестницу так, что концы лестниц на земле на расстоянии 2 м друг от друга, а верхние концы на стене — на расстоянии 1 м. Чему примерно с точностью до 1 дм равно расстояние от кошки, сидящей посередине маленькой лестницы, до воробья, севшего на середину большой лестницы?

Решение:

На рисунке схематично изображено условие задачи: отрезки MN, AC моделируют лестницы, точки K и B — их середины. Пусть BF, KE — средние линии треугольников OMN и OAC. Тогда $BF = \frac{1}{2}OM$, $KE = \frac{1}{2}OA$. Так как по построению $PF = KE$, то $BP = BF - PF = BF - KE = \frac{1}{2}OM - \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}AM - \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}AM = 1$.

Аналогично находим: $KP = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{2}$. Следовательно, $BK = \sqrt{BP^2 + PK^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1$ м. Искомое расстояние равно примерно 1,1 м.



Ответ. $\approx$ **1,1 м.**
Комментарий:

С этой задачей мало кто справился. Половина написанных решений верна. Другая половина либо содержит в себе какую-то путаницу в рассуждениях, либо какие-то кратко описанные аргументы, которые автор не потрудился объяснить (вероятнее всего, просто не было понято условие).

Задача №8

В центре квадратного бильярдного стола, лузы которого находятся только в его углах, лежит шар. Можно ли так кием направить шар, чтобы, отразившись от одного борта (угол падения равен углу отражения), шар попал в какую-нибудь лузу:

1) сразу;
2) отразившись от противоположного борта?

Решение:

1) На рис. 1 ломаная *OMC* является изображением искомой траектории шара. По построению, $MB = DN = AK = KM = \frac{1}{3}AB$. Так как $KN = BC$, то центр квадрата *ABCD* является серединой отрезка *NM*. Прямоугольные треугольники *NKM* и *CBM* равны, следовательно, $\angle KMN = \angle BMC$. Поэтому шар выпущен из центра стола в точку, делящую сторону стола в отношении 2:1.

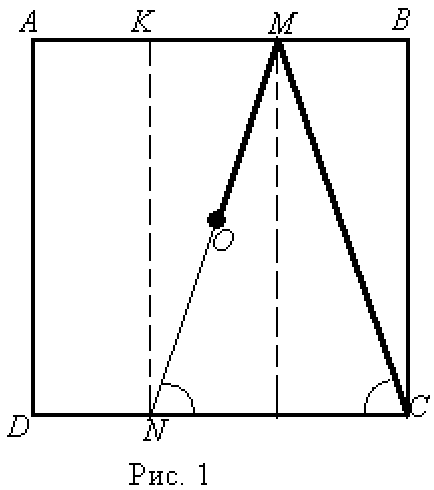


Рис. 1

2) На рис. 2 ломаная *OMKB* является изображением искомой траектории шара. По построению, $PM = MB = DN = NK = \frac{2}{5}AB$, $KC = AP = \frac{1}{5}AB$. Следовательно, центр квадрата *ABCD* является серединой отрезка *NM*. Прямоугольные треугольники BKL, *MKL*, *BKC* и *FMN* равны, следовательно, $\angle FMN = \angle BMK = \angle MKN = \angle BKC$. Поэтому шар выпущен из центра стола в точку, делящую сторону стола в отношении 2:3.

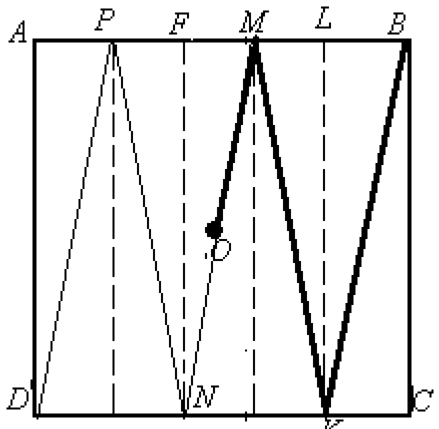


Рис. 2

Ответ. а) Можно; б) можно.
Комментарий:

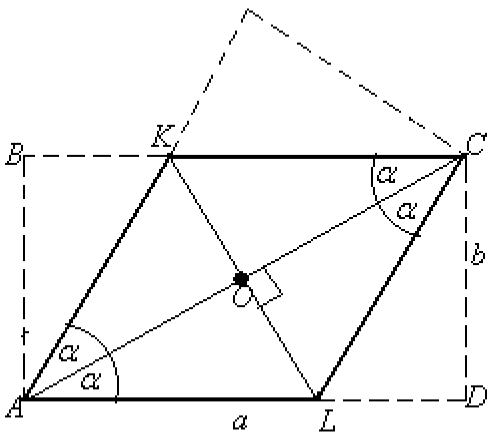
С этой задачей справилась примерно половина участников. Неверное решение писали те, кто не понимает выражения «Угол падения равен углу отражения», а также те, кто строил чертеж и рассуждения по нему «на глазок».

<u>Задача №9</u>

Прямоугольный лист бумаги длиной a см и шириной b см сложили по диагонали. Части, выходящие за границы двух слоёв бумаги, отрезали и развернули лист. Верно ли, что площадь полученного листа больше половины площади исходного листа?

Решение:

Если прямоугольник *ABCD* сложить по диагонали *AC*, а затем отрезать треугольники, выходящие за границы двух слоёв, то получим четырёхугольник *AKCL* (см. рис.). Этот четырёхугольник является ромбом. Действительно, $AK = AL$, $KC = CL$ и $\angle LCO = \angle KCO = \angle LAO = \angle KAO$ по построению. Следовательно, равнобедренные треугольники *AKL* и *CKL* равны, а поэтому *AKCL* — параллелограмм с равными сторонами.



Найдём диагонали ромба *AKCL*:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2},\ Kl = 2OK = 2OCtg\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $S_{AKCL} = \frac{1}{2}KL \cdot AC = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)\frac{b}{a} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a}$.

Так как площадь прямоугольника равна ab, то площадь полученного листа всегда больше половины площади исходного листа.

Ответ. Да.

Комментарий:

С этой задачей справилась примерно половина участников. Неверные решения обычно были основаны на чересчур интуитивных и нечетких рассуждениях без или почти без вычислений (интуитивные рассуждения без вычислений, как правило, дают неверный ответ).

Задача №10

В центре участка, имеющего форму круга радиуса 20 км, находится радиопередатчик. На границе этого участка расположены глушители. Передатчик слышен только в тех точках участка, которые удалены от передатчика не дальше, чем от каждого глушителя. Достаточно ли расположить на границе участка три глушителя, чтобы нельзя было услышать передатчик на площади меньшей половины площади участка?

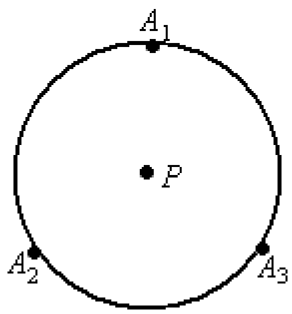


Рис. 1

Решение:

Предположим, что на границе участка расположены три глушителя на одинаковом расстоянии друг от друга. На рис. 1 схематически изображено расположение передатчика в центре круга P радиуса 20 км и глушителей в точках A_1, A_2, A_3, являющихся вершинами равностороннего треугольника.

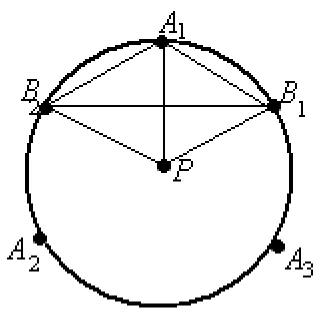


Рис. 2

Проведём серединный перпендикуляр B_2B_1 к отрезку A_1P (рис. 2). Так как в четырёхугольнике $A_1B_1PB_2$ диагонали перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, то он является ромбом. Следовательно, $A_1B_2 = A_1B_1 = A_1P$. Так как $\angle A_1PA_2 = 120°$, $\angle A_1PB_2 = 60°$, то B_2 — середина дуги A_1A_2. Аналогично устанавливается, что B_1 — середина дуги A_1A_3.

Из доказанного следует, что треугольники PA_2B_2 и PA_3B_1 — равносторонние. Следовательно, перпендикуляры, проведенные из точек B_1 и B_2 соответственно к отрезкам PA_3 и PA_2, являются серединными перпендикулярами (рис. 3).

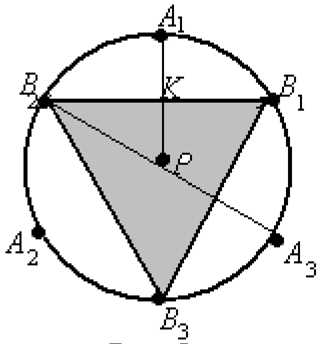


Рис. 3

Из условия следует, что радиопередатчик может быть услышан только в точках равностороннего треугольника $B_1B_2B_3$. Найдём его сторону. $B_1B_2 = 2\ B_2K =$ $2\sqrt{PB_2^2-\left(\dfrac{A_1P}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\dfrac{3}{4}B_2P^2} = \sqrt{3}B_2P$.

Найдём площадь S треугольника $B_1B_2B_3$. $S =$ $\dfrac{1}{2}B_2P\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}B_2P = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}B_2P^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 400 = 300\sqrt{3}$ м². Так как площадь круга равна 400π и $300\sqrt{3} < 200\pi$, то площадь треугольника $B_1B_2B_3$ меньше половины площади участка.

Ответ. Да.

Комментарий:

С этой задачей почти никто не справился. Типичная ошибка в неверных решениях была связана с тем, что их авторы невнимательно прочитали условия.

ЗНАНИКА