ЗОЛОТОЙ КЛЮЧИК

ВСЕРОССИЙСКИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОНКУРС

ЗНАНИКА

Электронная школа
www.znanika.ru

Разбор задач второй части заданий

4-5 класс

6	7	8	9	10
Б	А	В	Б	Г

<u>Задача №6</u>

На дне рождения у Саши каждый мальчик (и Саша тоже!) съел по 4 пирожных и по 3 кекса, а каждая девочка – по одному пирожному и 2 кекса. Оказалось, что количество съеденных детьми пирожных равно количеству съеденных ими кексов. Кого из гостей было больше на дне рождения у Саши: мальчиков или девочек; и на сколько?

А. Мальчиков, на 1 Б. Девочек, на 1 В. Девочек, на 2 Г. Поровну

Решение:

Так как каждый мальчик съедал на 1 пирожное больше, чем кексов; а каждая девочка, наоборот — на 1 кекс больше, чем пирожных; и количество съеденных детьми пирожных равно количеству съеденных ими кексов, то мальчиков и девочек на дне рождения было одинаковое количество. Так как именинник — мальчик, то из гостей девочек было больше на 1.

Ответ. Б. Девочек, на 1.

Комментарий:

В этой задаче напутали почти все. Люди выбирали ответ Г, правильно думая, что мальчиков и девочек на дне рождения было поровну. Но спрашивалось-то про количество ГОСТЕЙ (т.е. всех, кроме самого Саши).

<u>Задача №7</u>

Подходя к школе, Петя и Вася поспорили, сколько метров осталось до входа в школу. Петя сказал, что больше 25 м, а Вася утверждал, что больше 20 м. Потом выяснилось, что ровно один из них ошибся. Какой из приведенных ответов соответствует действительности?

А. Не больше 25 м Б. Больше 25 м В. Не больше 20 м Г. Определить невозможно

Решение:

Петя не может быть правым: если расстояние до школы больше 25 м, то оно и больше 20 м, то есть в этом случае оба правы. Но ведь один из них ошибся. Следовательно, прав Вася: расстояние до школы больше 20 м, но не больше 25 м.

Ответ. А. Не больше 25 м.

Задача 7.

Комментарий:

Эту задачу большинство решило правильно. Неправильный ответ Г (наиболее частый неверный ответ) в ней давали те, кто не понял, что утверждение «расстояние не меньше 25 м» сильнее, чем условие «расстояние не меньше 20 м» (т.е. второе вытекает из первого). Варианты А и Б выбирали те, кто не разобрался в условии.

Задача №8

В кинозале при любом размещении 80 зрителей найдётся ряд, в котором сидит не менее трёх зрителей, а при любом размещении 69 зрителей, по крайней мере, в 5 рядах будет не более одного зрителя. Сколько рядов в кинозале?

А. 37 рядов Б. 38 рядов В. 39 рядов Г. 40 рядов

Решение:

Если бы рядов было более 39, то можно было бы рассадить 80 зрителей так, чтобы не нашлось ряда, в котором не менее трёх зрителей (достаточно в каждый из 40 рядов посадить по 2 зрителя, а остальные оставить пустыми).

Если бы рядов было 38, то, посадив по 2 зрителя на 34 ряда, получим не более 4 рядов, в которых не более одного зрителя (в одном ряду 1 зритель, и не более 3 рядов — пустые).

Если рядов меньше 38, то рядов, в которых не более одного зрителя, ещё меньше при любом их размещении.

Если рядов 39, то условие задачи выполняется. Пусть зрителей 80. Посадим на каждый ряд 2 зрителя. Всего 78 зрителей. Посадив в какой-то ряд еще 2-х зрителей, получим, по крайней мере, 1 ряд, в котором сидит не менее трех зрителей. При рассадке 69 зрителей наибольшее количество рядов, в которых не более одного зрителя, будет в случае, когда в каждом ряду не более 2 зрителей. Оно равно 5: 39 – 34 = 5.

Ответ. В. 39 рядов.

Комментарий:

Эту задачу в основном решили неправильно. Типичный ошибочный ответ А вероятно получался благодаря тому, что люди забывали, что можно усадить в некоторые ряды по 0 зрителей – и получить не 5, а 4 ряда с условием «не более одного зрителя в этом ряду». Те, кто выбирал ответ Г, забывали, что он противоречит условию про 80 зрителей.

Задача №9

В чемпионате по футболу 32 команды разделены на 8 групп по 4 команды в каждой группе. В каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу. По две команды-победительницы из каждой группы выходят в одну восьмую финала. Команды, победившие в каждом из восьми матчей одной восьмой финала, выходят в четвертьфинал, затем победители играют в двух полуфинальных матчах и, наконец, финал, определяющий чемпиона. Команды, проигравшие в полуфинальных матчах, играют между собой за третье место. Сколько всего матчей в чемпионате сыграли команда, занявшая третье место?

А. 6 Б. 7 В. 8 Г. 12

Решение:

В группе каждая команда провела 3 матча. Команда, занявшая третье место, играла в одной восьмой финала, в четвертьфинале, в полуфинале и в матче за третье место. Всего в 7 матчах.

Ответ. Б. 7.
Комментарий:

Эту задачу решали с переменным успехом. Судя по всему (поскольку в работах участвовавших встретились вообще все варианты ответов), ошибались обычно те, кто ставил ответ просто наугад.

<u>Задача №10</u>

На новогодней распродаже марок в филателистическом магазине любая почтовая марка стоила 1 зед (зед — условная денежная единица). При этом к каждым десяти купленным маркам одна давалась бесплатно, а за каждую сотню приобретенных марок еще дарили 5 марок. Заплатив все свои деньги за марки в этом магазине, Богдан получил 200 марок. Сколько у него было денег?

А. 195 зедов Б. 182 зедов В. 180 зедов Г. 178 зедов

Решение:

Из условия следует, что у Богдана больше 100 зедов. Поэтому он может купить за 100 зедов 100 марок, получив дополнительно 10 + 5 = 15 марок. Приобретение остальных 200 – 115 = 85 марок потребует 78 зедов, так как за 70 зедов он купит 70 + 7 = 77 марок и 8 марок за 8 зедов. Всего он истратил 178 зедов. Так как он заплатил все свои деньги, то у него было 178 зедов.

Ответ. Г. 178 зедов.
Комментарий:

С этой задачей в основном все справились. Самый распространенный неверный вариант А наверно был выбран либо потому что при ответе наугад люди чаще выбирают А (это известная статистика), либо потому что люди забыли про условие «за 10 марок дают бесплатно еще одну»

6-7 класс

6	7	8	9	10
Б	Б	В	Б	А

Задача №6

На какое наименьшее количество кусочков, не обязательно равных, нужно разрезать торт, чтобы его можно было разделить поровну и между тремя, и между пятью сладкоежками, не разрезая их на меньшие кусочки?

А. На 6 Б. На 7 В. На 11 Г. На 15

Решение:

Разделим торт сначала в отношении 2:3. Большую часть разрежем на три равные части. Меньшую часть также сначала разрежем на три равные части, а потом одну из них разрежем пополам. Получим всего 7 частей, массы которых составляют $\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{15},\frac{2}{15},\frac{1}{15},\frac{1}{15}$ части массы всего торта. Из них можно составить и три $\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{5},\frac{2}{15}+\frac{1}{5},\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\right)$, и пять $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{15}+\frac{1}{15},\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)$ равных частей.

Деление на шесть частей не может обеспечить выполнение требований задания. Если обозначить массы этих частей через m_1, …, m_6, то очевидно, что должны выполняться равенства $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 + m_6$ (может быть, после изменения нумерации) для разделения между пятью сладкоежками. Для разделения между тремя необходимо, чтобы суммы трёх пар частей были равными. Следовательно, должны бать верными равенства $m_6 + m_1 = m_5 + m_2 = m_3 + m_4$ (тоже, возможно, после изменения нумерации этих частей). Из этих равенств следует, что $m_3 = m_5$. Но $m_3 = m_5 + m_6$. Полученное противоречие свидетельствует о невозможности разрезания торта на 6 частей, удовлетворяющих требованиям задачи.

Ответ. Б. На 7.

Комментарий:

С этой задачей справилось большинство. Наиболее частый неверный вариант Г выбирали те, кто не сообразил, как с неравными кусками кормить и 3, и 5 сладкоежек.

Задача №7

В чемпионате по футболу 32 команды разделены на 8 групп по 4 команды в каждой группе. В каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу. По две команды-победительницы из каждой группы выходят в одну восьмую финала. Команды, победившие в каждом из восьми матчей одной восьмой финала, выходят в четвертьфинал, затем победители играют в двух полуфинальных матчах и, наконец, финал, определяющий чемпиона. Команды, проигравшие в полуфинальных матчах, играют между собой за третье место. Сколько всего матчей было сыграно в чемпионате?

А. 48 Б. 64 В. 96 Г. 128

Решение:

В каждой группе проведено по 6 матчей. Всего в группах проведено 48 матчей. 8 матчей проведено в $\frac{1}{8}$ финала, 4 матча — в $\frac{1}{4}$ финала, 2 матча — в $\frac{1}{2}$ финала, финальный матч и матч за третье место. Всего 48 + 8 + 4 + 2 + 2 = 64 матча.

Ответ. Б. 64.

Комментарий:

Эту задачу в основном все решили верно. Неверные ответы тут давались в случае ошибок в вычислениях.

Задача №8

Саша обратил внимание на номер машины, подъехавшей к его дому: СТО 85-87. Интересно, если к первому числу прибавить цифры второго, то получится 100, и если ко второму числу прибавить цифры первого, то тоже получится 100. Сколько всего таких номеров?

А. 7 Б. 8 В. 9 Г. 10

Решение:

Так как сумма цифр двузначного числа меньше 19, то оба числа в номере должны в качестве цифры десятков иметь цифру 8 или цифру 9. В противном случае сумма двузначного числа и суммы цифр другого двузначного числа не может равняться 100. Это такие номера:

СТО 83- 89, СТО 84- 88, СТО 85- 87, СТО 86- 86, СТО 87- 85, СТО 88- 84, СТО 89- 83, СТО 90-91, СТО 91-90. Всего 9 номеров.

Ответ. В. 9.

Комментарий:

С этой задачей мало кто справился. В основном люди отвечали почти наугад: в том числе если не нашли всех возможных номеров.

Задача №9

Организаторы математической олимпиады составляют варианты заданий для 4, 5, 6, 7, 8 и 9 классов. В каждом варианте должно быть семь задач, ровно четыре из которых не встречаются ни в одном из других вариантов. Какое максимальное количество заданий можно включить в составляемые варианты?

А. 24 Б. 33 В. 36 Г. 40

Решение:

Во всех вариантах есть $4 \cdot 6 = 24$ задачи, встречающиеся только в одном из вариантов. Остальные задачи могут встречаться, по крайней мере, в двух вариантах. Так как вариантов 6, то из них можно образовать 3 пары, например, 5 и 6 классы, 7 и 8, 9 и 10. В каждой паре самое большее есть $7 - 4 = 3$ совпадающие задачи, то есть количество задач, встречающихся хотя бы в двух вариантах, не более $3 \cdot 3 = 9$. При любом другом распределении общих задач их количество не будет превосходить 9. Таким образом, максимальное количество задач может равняться $24 + 9 = 33$.

Ответ. Б.33.

Комментарий:

С этой задачей справилось большинство. Основной неверный ответ – В – давали наверно те, кто делал ошибку в вычислениях.

Задача №10

За круглым столом расположились 30 взрослых участников дискуссии так, что правым соседом каждой женщины был мужчина, а у половины мужчин справа сидела женщина. Сколько женщин сидело за круглым столом?

А. 10 Б. 11 В. 20 Г. Определить однозначно невозможно

Решение:

Очевидно, что если женщин 10, а мужчин 20, то их можно расположить так, как указано в условии: ж м м ж м м … ж м м. Требуется доказать, что это единственное решение.

Так как левым соседом каждой женщины не может быть женщина (правый сосед каждой женщины — мужчина), то количество женщин не больше половины количества мужчин. А так как у половины мужчин справа сидела женщина, то количество женщин не меньше половины количества мужчин. Следовательно, количество женщин равно половине количества мужчин, то есть составляет треть количества участников дискуссии и равно 10.

Ответ. А. 10.

Комментарий:

С этой задачей в основном все справились. Впрочем, некоторые ответы наугад всё же встречались.

8-9 класс

6	7	8	9	10
В	Б	Б	А	Б

<u>Задача №6</u>

В вагоне находится 60 контейнеров трёх видов: контейнеры первого вида массой 0,5 т, второго вида — 0,4 т, третьего вида — 0,3 т. Стоимость одного контейнера каждого вида — соответственно 800, 700 и 600 зедов (зед — условная денежная единица). Общая масса всех контейнеров — 25 т. Какова их общая стоимость?

А. 40 000 зедов Б. 42 000 зедов В. 43 000 зедов Г. 45 000 зедов

Решение:

Обозначим через x, y, z количества контейнеров соответственно первого, второго и третьего видов. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,5x+0,4y+0,3z=25, \\ x+y+z=60 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x+4y+3z=250, \\ 3x+3y+3z=180. \end{cases}$$

Отсюда, сложив оба уравнения, получим: $8x + 7y + 6z = 430$, или $800x + 700y + 600z = 43000$.

Ответ. В. 43 000 зедов.

Комментарии:

С этой задачей в основном все справились. Судя по всему, неверный ответ тут либо выбирался наугад, либо допускалась какая-то арифметическая ошибка.

<u>Задача №7</u>

На занятие кружка по математике пришло несколько учеников. Во время занятия каждый из них решил 3 задачи из предложенных 6. Известно, что для любых двух кружковцев есть хотя бы одна задача, которую один из них решил, а другой нет. Какое наибольшее количество учащихся могло придти на занятие?

А. 18 Б. 20 В. 21 Г. 24

Решение:

Так как каждый ученик решил 3 задачи, и для любых двух кружковцев есть хотя бы одна задача, которую один из них решил, а другой нет, то задача сводится к нахождению количества различных наборов по 3 задачи из предложенных 6. Оно равно $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}=20$. Этот результат можно получить следующими рассуждениями. В качестве первой задачи можно взять любую из 6, для любой выбранной первой задачи есть 5 возможностей для выбора второй; третью задачу можно выбрать из 4 оставшихся, при этом любые три задачи окажутся выбранными столько раз, сколькими способами их можно переставить, то есть 6 раз. Число 20 и есть искомое количество учащихся. Для 21 учащегося требования задачи не выполняются, так как наборы решённых задач хотя бы у двух из них будут совпадать.

Ответ. Б. 20.

Комментарии:

С этой задачей справилось примерно половина участников. Неверный ответ тут выдавался, похоже, наугад: обычно это были А и Г, т.е. максимальный из вариантов и минимальный.

Задача №8

В чемпионате по футболу команды-участницы разделены на несколько групп по одинаковому количеству команд в каждой группе. В каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу. По две команды-победительницы из каждой группы выходят в одну восьмую финала. Команды, победившие в каждом из восьми матчей одной восьмой финала, выходят в четвертьфинал; затем победители играют в двух полуфинальных матчах и, наконец, финал, определяющий чемпиона. Команды, проигравшие в полуфинальных матчах, играют между собой за третье место. Всего было сыграно 96 матчей в чемпионате. Сколько всего команд участвовало в чемпионате?

А. 32 Б. 40 В. 48 Г. 80

Решение:

В $\frac{1}{8}$ финала проведено 8 матчей, 4 матча — в $\frac{1}{4}$ финала, 2 матча — в $\frac{1}{2}$ финала, финальный матч и матч за третье место. Всего в этой части чемпионата проведено 8 + 4 + 2 + 2 = 16 матчей. Следовательно, во всех группах проведено 96 – 16 = 80 матчей.

Так как в $\frac{1}{8}$ финала было 8 игр, то всего было 8 групп, количество матчей в одной группе равно 80:8 = 10.

Так как в каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу, то по 10 матчей в группе могли провести 5 команд: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Следовательно, в чемпионате по футболу участвовало 8·5 = 40 команд.

Ответ. Б. 40 команд.

Комментарии:

С этой задачей справилась примерно половина участников. Неверный ответ тут выдавался, похоже, наугад.

Задача №9

Когда-то в школах во всех классах, начиная с пятого, проводились экзамены. Из 27 билетов по математике семиклассник Стёпа мог ответить лишь на те, номера которых были кратны 5. Когда десятым по счёту он брал билет, то билет №1 и все билеты с 20-го по 27-й уже взяты. Сравните вероятность p_1 того, что Стёпа вытащит билет, на который он может ответить, с вероятностью p_2 того, чтобы он вытащил бы такой билет, если бы брал билет первым?

А. $p_1 < p_2$ Б. $p_1 = p_2$ В. $p_1 > p_2$ Г. Сравнить невозможно

Решение:

Так как Стёпа брал билет 10-м, то осталось всего 27 – 9 = 18 билетов. Из них он мог ответить на билеты с номерами 5, 10, 15, то есть на 3 билета. Поэтому $p_1 = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

Если бы Стёпа брал билет первым, то из 27 билетов он мог бы ответить на билеты с номерами 5, 10, 15, 20, 25, то есть на 5 билетов. Поэтому $p_2 = \frac{5}{27}$.

Так как $\frac{1}{6} < \frac{5}{27}$, то $p_1 < p_2$.

Ответ. А. $p_1 < p_2$.

Комментарии:

С этой задачей тоже справилась примерно половина участников. Неверные ответы тут обычно давались В и Г, что может указывать как на путаницу в вычислениях (в случае В), так и на то, что ответ выбирался произвольно (маловероятный, хотя иногда в таких задачах и возможный, ответ Б, судя по всему, участниками отметался).

<u>Задача №10</u>

Какие из следующих утверждений одновременно истинны или одновременно ложны?

1) Для каждого учащегося 8-А класса найдётся учащийся 8-Б класса ниже его ростом.
2) Каждый учащийся 8-Б класса ниже ростом самого низкого учащегося 8-А класса.
3) Самый низкий учащийся 8-Б класса ниже самого низкого учащегося 8-А класса.
4) Средний рост учеников 8-А класса больше среднего роста учащихся 8-Б класса.

А. 1) и 2) Б. 1) и 3) В. 2) и 3) Г. 2) и 4)

Решение:

Обозначим в порядке неубывания рост каждого учащегося 8-А класса через x_1, x_2, …, x_n: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, а рост каждого учащегося 8-Б класса в порядке неубывания — через y_1, y_2, …, y_k: $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k$, где n и k — количества учащихся в этих классах.

Тогда из утверждения 1) следует, что $y_1 < x_1$, то есть утверждение 3). Следовательно, если истинно утверждение 1), то истинно и утверждение 3). И наоборот, если $y_1 < x_1$, то для i, $1 < i \le n$, $y_1 < x_i$, то есть для любого учащегося 8-А класса найдётся учащийся 8-Б класса, который ниже его.

Из утверждения 3) не следует утверждение 2), так как, если $y_1 < x_1$, то не обязательно, что $y_i < x_1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому утверждение 2) не может быть истинным или ложным одновременно ни с утверждением 3), ни с утверждением 1).

Из утверждения 4) не следует ни одно из утверждений 1), 2), 3), так как соотношения между средними двух групп чисел не следуют те же соотношения между представителями этих групп. Например, из неравенства $\frac{1+2+7}{3} < \frac{4+5}{2}$ не следует, что 7 < 5 или из неравенства $\frac{4{,}5+5}{2} < \frac{4+5+6}{3}$ не следует, что 4,5 < 5.

Ответ. Б. 1) и 3).
Комментарии:

С этой задачей справилась половина участников. Похоже, что наиболее распространенная ошибка была в том, что они проверяли то, что одно утверждение выводится из другого, но не проверяли, что оно обязательно выводится из первого. Таким учащимся мы рекомендуем повторить понятие равносильности (или, как ее еще называют, необходимости и достаточности).

ЗНАНИКА